

UNIVERSITA' DEGLI STUDI "LA SAPIENZA" DI ROMA
POLO DI RIETI
FACOLTA' DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'AMBIENTE
E DEL TERRITORIO

Geometria – III esonero parziale

13 – 12 – 2005

A.A. 2005 – 2006

Cognome _____	Nome _____
Matricola _____	Codice _____
Scrivere in stampatello	

Quesiti (punti 2 per ciascun quesito)

Scegliere la risposta esatta **giustificandola** opportunamente:

1. Dati in $\mathbb{R}^3$ una retta e due punti stabilire quale delle seguenti affermazione è vera:
 - a. Esiste sempre un piano che li contiene;
 - b. Non esiste alcun piano che li contiene;
 - c. Se esiste un piano che li contiene esso è unico;
 - d. Esistono infiniti piani che li contengono.
2. Considerati i punti $P(3, -2)$ e $Q(4, 1)$ e detta **PQ** la retta che li congiunge stabilire il valore di verità delle seguenti affermazioni:
 - a. La retta **PQ** è parallela al vettore $\mathbf{v}(2, 6)$;
 - b. La retta **PQ** ha equazione cartesiana $3x - y - 13 = 0$;
 - c. La retta di equazione $x + 3y - 7 = 0$ è perpendicolare alla retta **PQ**.
3. Stabilire quali tra le seguenti equazioni rappresenta una circonferenza:
 - a. $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$;
 - b. $x^2 + y^2 + 2x - y + 5 = 0$;
 - c. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Esercizi

1. Determinare i valori del parametro reale k per i quali le rette
$$x + ky - 2 = 0 \qquad 2x - ky + k = 0$$
sono incidenti, parallele o coincidenti. (Punti 4)
2. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1, 6)$, $Q(7, -2)$, $R(0, 5)$. (Punti 3)

3. Data la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

e il punto $P(2, 1, -3)$ determinare le equazioni della retta per P perpendicolare ad r . (Punti 5)

4. Date le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

- Verificare che sono incidenti ;
- Determinare il loro punto di intersezione ;
- Trovare l'equazione del piano che le contiene. (Punti 9)

5. Dato il punto $A(1, 2, -1)$ e le rette r ed s rispettivamente di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

determinare l'equazione del piano per A e parallelo alle rette r ed s . (Punti 5)

SOLUZIONI

Quesiti

1. La risposta corretta è **d**.

Una retta e un punto fuori di essa caratterizzano univocamente un piano; pertanto dati una retta e due punti esistono infiniti piani che li contengono.

2. La risposta **a** è vera.

Infatti i parametri direttori della retta **PQ** sono (1, 3) e sono proporzionali ai parametri direttori di **v** (2, 6).

La risposta **b** è falsa.

Infatti la retta **PQ** ha equazione

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+2}{1+2} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 3(x-3) = y+2 \Rightarrow 3x - y - 9 - 2 = 0 \Rightarrow 3x - y - 11 = 0$$

La risposta **c** è vera.

Infatti il fascio di rette perpendicolari a **PQ** ha equazione

$$y = -\frac{1}{3}x + k \Rightarrow x + 3y - k = 0$$

Pertanto la retta $x + 3y - 7 = 0$ appartenendo al fascio di perpendicolari è essa stessa perpendicolare alla retta **PQ**.

3. La risposta corretta è **a**.

Infatti calcolando il raggio della circonferenza **a** si ottiene

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+8} = \frac{1}{2}\sqrt{10}; \quad \text{per la } \mathbf{b} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{4+1-20}; \text{ essendoci sotto il segno di}$$

radice un numero negativo la circonferenza non è reale; per la **c** infine si ha

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+36-40} = \frac{1}{2}\sqrt{0} \text{ e pertanto la circonferenza si riduce al solo centro.}$$

Problemi

1. Consideriamo il sistema costituito dalle equazioni delle due rette

$$\begin{cases} x + ky - 2 = 0 \\ 2x - ky + k = 0 \end{cases}$$

Il determinante della matrice incompleta è

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -k \end{vmatrix} = -k - 2k = 0 \Rightarrow -3k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Per $k \neq 0$ pertanto $r(A) = 2$. Considerata la matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 2 & -k & k \end{pmatrix}$$

si ha $r(A') = 2$ e quindi il sistema è compatibile, ammette un'unica soluzione e le rette sono incidenti.

Per $k = 0$ si ha $\text{Det}(A) = 0$ pertanto $r(A) = 1$ mentre $r(A') = 2$ quindi il sistema è incompatibile, non ammette soluzioni e le rette sono parallele.

2. Per l'esistenza della circonferenza i tre punti devono essere non allineati, cioè deve essere

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Il $\text{Det}(A) = -14$ e quindi i tre punti sono non allineati.

La generica circonferenza ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

essa deve essere soddisfatta dalle coordinate dei tre punti dati

$$\begin{cases} a + 6b + c + 37 = 0 \\ 7a - 2b + c + 53 = 0 \\ 5b + c + 25 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha il determinante dei coefficienti eguale al $\text{Det}(A)$ e pertanto non nullo, quindi il sistema ammette, per il teorema di Rouchè-Capelli, un'unica terna di soluzioni che calcoliamo con le formule di Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -37 & 6 & 1 \\ -53 & -2 & 1 \\ -25 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = -\frac{112}{14} = -8 \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -37 & 1 \\ 7 & -53 & 1 \\ 0 & -25 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = -\frac{56}{14} = -4$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -37 \\ 7 & -2 & -53 \\ 0 & 5 & -25 \end{vmatrix}}{-14} = -\frac{70}{14} = -5.$$

Quindi l'equazione della circonferenza richiesta è

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0.$$

3. Per trovare la retta richiesta passante per il punto P e perpendicolare alla retta r basta calcolare i parametri direttori di una generica retta per P ed imporre la condizione di perpendicolarità tra i parametri direttori di questa e della retta r . I parametri direttori della retta r sono

$$l' = 2 \quad m' = 2 \quad n' = 3.$$

Consideriamo il generico punto Q della retta r esso ha coordinate

$$Q(1 + 2t, 3 + 2t, 1 + 3t)$$

pertanto considerata la retta PQ i suoi parametri direttori sono

$$l = 2 - 1 - 2t = 1 - 2t; \quad m = 3 - 3 - 2t = -2 - 2t; \quad n = 1 - 1 - 3t = -3t;$$

dovendo essere la retta PQ e la retta r perpendicolari deve risultare

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

essa equivale alla seguente

$$\begin{aligned} 2(1 - 2t) + 2(-2 - 2t) + 3(-3t) &= 0 \Rightarrow \\ 2 - 4t - 4 - 4t - 9t &= 0 \Rightarrow -17t = 14 \Rightarrow t = -\frac{14}{17} \end{aligned}$$

Allora i parametri direttori della retta **PQ** sono

$$\begin{aligned}l &= 1 - 2t = 1 + \frac{28}{17} = \frac{45}{17} \\m &= -2 - 2t = -2 + \frac{28}{17} = -\frac{6}{17} \\n &= -4 - 3t = -4 + \frac{42}{17} = -\frac{26}{17}\end{aligned}$$

e l'equazione richiesta, essendo i parametri direttori proporzionali ad l, m, n è

$$\begin{cases} x = 2 + 45t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - 26t. \end{cases}$$

4. **a.** Consideriamo il sistema formato dalle equazioni delle rette date

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 3x - y + z = -1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Determiniamo il rango della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $r(A) \leq 3$; essendo il minore

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$r(A) = 3$; considerata la matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il suo determinante

$$\text{Det}(A') = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi $r(A') = 3$; pertanto il sistema è compatibile, ammette un'unica soluzione e le due rette sono incidenti.

b. Alle coordinate del punto di intersezione fra le rette r ed s si giunge sopprimendo un'equazione delle quattro poste a sistema e, tenuto conto che il minore M si è ottenuto eliminando la prima equazione, applicando le formule di Cramer si ottiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 2$$

Quindi il punto di intersezione è $P(-1, 0, 2)$.

c. L'equazione del piano contenente le rette date si ottiene imponendo che esso sia parallelo ai vettori che hanno per componenti i parametri direttori delle due rette e passi per $P(1, 0, -2)$.

I parametri direttori delle rette date si ottengono considerando le loro equazioni parametriche; nell'equazione della retta r posto $y = t$ si ottiene

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$

e analogamente nell'equazione della retta s posto $y = t$ si ottiene

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi il vettore $\mathbf{v}(2, 1, -5)$ è parallelo alla retta r e il vettore $\mathbf{w}(1, 1, -2)$ è parallelo alla retta s ; pertanto l'equazione del piano è data da:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-1)(3) - y(+1) + (z+2)(+1) = 0 \Rightarrow 3x - y + z - 1 = 0$$

5. Date due rette non parallele e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dello spazio, le rette per P_0 parallele alle rette date individuano un piano per P_0 . Considerato un qualsiasi punto $P(x, y, z)$ del piano se i vettori $\mathbf{PP}_0$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispettivamente di componenti $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ $\mathbf{v}(l, m, n)$ $\mathbf{w}(l', m', n')$ sono complanari e quindi linearmente dipendenti sussiste il seguente teorema:

il piano per P_0 parallelo a due rette non parallele di parametri direttori (l, m, n) e (l', m', n') ha equazione

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Nel caso dell'esercizio in questione ricaviamo le equazioni parametriche della retta s ; nelle sue equazioni cartesiane, posto $y = t'$ si ha

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = t' \\ z = 3t' \end{cases}$$

Pertanto i parametri direttori di r sono $(-1, 0, 2)$ e quelli di s $(-1, 1, 3)$ le due rette non sono parallele e in base al teorema precedente l'equazione del piano parallelo ad r ed s e passante per $A(1, 2, -1)$ è data da

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-1)(-2) - (y-2)(-1) + (z+1)(-1) &= 0 \Rightarrow -2x + 2 + y - 2 - z - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$