

## **SOLUZIONI APPELLO DICEMBRE 05**

### **ESERCIZIO1** (Geometria)

Calcoliamo il  $\det(A)$  per stabilire se la matrice inversa di  $A$  esiste

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 2 - (-6 - 1 + 0) = -1$$

Essendo  $\det(A) \neq 0$  esiste l'inversa ed essa è eguale a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^T$$

Calcoliamo i complementi algebrici

$$a_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad a_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad a_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Quindi la matrice dei complementi algebrici è

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e la trasposta è

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa è

$$A^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO2 (Geometria; solo II mod.; II – III mod.)

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned}\text{Det}(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda) + 2) &= (2-\lambda)(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3.\end{aligned}$$

b) Gli autovalori di A sono  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  doppio  $\lambda_3 = 3$

Per  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  l'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - 2I)X = 0$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = -z \\ y = -z \end{cases}$$

posto  $x = t$  le soluzioni sono rappresentate dal vettore  $\mathbf{v}(t, 0, 0)$ .

Quindi una base dell'autospazio relativo a  $\lambda = 2$  è  $\{(1, 0, 0)\}$ .

Per  $\lambda_3 = 3$  l'autospazio relativo è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - 3I)X = 0$$

cioè

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ -2y = z \\ 2y = z \end{cases}$$

posto  $x = t$  le soluzioni sono rappresentate dal vettore  $\mathbf{v}(t, t, -2t)$ .

Quindi una base dell'autospazio relativo a  $\lambda = 3$  è  $\{(1, 1, -2)\}$ .

c) La matrice A non è diagonalizzabile in quanto l'autovalore  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  ha  $m_a(2) = 2$  (essendo tale autovalore zero doppio del polinomio caratteristico) e  $m_g(2) = 1$  avendo l'autospazio relativo dimensione 2.

## ESERCIZIO2 (solo II mod.)

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & k & k-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ k & k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)(k-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = k$$

Per  $k \neq 1$  e  $k \neq -1$  la matrice ha tre autovalori reali e distinti e pertanto è diagonalizzabile.

Per  $k = 1$   $m_a(1) = 2$ , essendo tale autovalore zero doppio del polinomio caratteristico; calcoliamo  $m_g(1)$ , che si ottiene come differenza tra la dimensione dello spazio vettoriale associato a  $\mathcal{R}^3$  e la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

La dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore considerato si ottiene calcolando le soluzioni del sistema

$$(A - I)X = 0$$

cioè

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} -2x + z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice dei coefficienti ha rango 2 e pertanto, essendo  $m_g(1) = 3 - 2 = 1$ , risulta  $m_a(1) = 2$  e  $m_g(1) = 1$  e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Per  $k = -1$   $m_a(-1) = 2$ , essendo tale autovalore zero doppio del polinomio caratteristico; mentre la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore considerato si ottiene calcolando le soluzioni del sistema

$$(A + I)X = 0$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} +z = 0 \\ 2y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice dei coefficienti ha rango 2 e pertanto, essendo  $m_g(-1) = 3 - 2 = 1$ , risulta  $m_a(-1) = 2$  e  $m_g(-1) = 1$  e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

### ESERCIZIO3 (Geometria; solo II mod.; II – III mod.)

Calcoliamo il determinante della matrice A dei coefficienti

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 0 & k \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 0 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 0 = 0 + 3k^2 - 2 - (0 + k + 0) = 3k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3} \quad k_2 = 1$$

Per  $k_1 \neq -\frac{2}{3}$  e  $k_2 \neq 1$  il  $\text{Det}(A) \neq 0$  e si ha  $r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow$  il sistema per il teorema di Rouchè-Capelli è compatibile e ammette un'unica soluzione.

Per  $k_2 = 1$  il  $\text{Det}(A) = 0$ , ma esiste il minore

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per cui  $r(A) = 2$ ; consideriamo la matrice completa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e determiniamone il rango attraverso i suoi minori di ordine 3

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +3 - 2 - (+1) = 1 - 1 = 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - (-2 + 3) = 0$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \text{ i minori del terzo ordine sono tutti nulli e quindi}$$

$r(A') = 2 \Rightarrow$  il sistema è compatibile e ammette  $\infty^{3-2}$  soluzioni =  $\infty^1$  soluzioni; ponendo nel testo  $z = t$  si ottiene

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z = t \\ x = -\frac{t}{2} \\ y = 1 + \frac{3t}{2} \end{cases}$$

e quindi la terna di soluzioni è  $\left(-\frac{t}{2}, 1 + \frac{3t}{2}, t\right)$  con  $t \in \mathcal{R}$ .

Per  $k_1 = -\frac{2}{3}$   $\text{Det}(A) = 0$  pertanto  $r(A) = 2$ , essendo il minore  $M \neq 0$ . Consideriamo la matrice  $A'$  completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il suo rango con il teorema degli orlati; consideriamo il minore

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +\frac{4}{3}$$

orliamo tale minore con la terza colonna e la terza riga

$$M_1' = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} - 2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

Consideriamo allora il minore che si ottiene orlando  $M'$  con la quarta colonna e la terza riga

$$M_2' = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +2 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

essendo  $M_2' \neq 0$  allora  $r(A') = 3$  e il sistema è incompatibile.

### ESERCIZIO3bis (solo II mod.)

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k-2 & -1 \\ 1 & -1 & -k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k-2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -k^2(k-2) + 1 + 1 - (k + k - (k-2)) =$$

$$-k(k^2 - 2k + 1) = -k(k-1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \quad k_2 = 1.$$

Per  $k_1 = 0$  il sistema diventa

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha  $\text{Det}(A) = 0$  quindi il sistema ammette autosoluzioni diverse da quella banale.  
Il minore

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

è nonnullo pertanto  $r(A) = 2$  e il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

che posto  $x = h$  da per autosoluzioni  $(h, h, -h)$  con  $h$  parametro reale.

Per  $k_2 = 1$  il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

che si riduce alla sola equazione  $x - y - z = 0$  in cui, posto  $y = 1$  e  $z = 0$  si ha l'autosoluzione  $(1, 1, 0)$ .

#### ESERCIZIO4 (Geometria; III mod.)

La retta richiesta si ottiene come intersezione del piano che contiene la retta  $r$ , di quello che contiene la retta  $s$  e che entrambi passano per  $A$ .

Le equazioni cartesiane della retta  $r$  sono, posto  $z = t$

$$\begin{cases} x - 6z - 2 = 0 \\ y + 2t - 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio di piani di asse  $r$  è

$$\lambda(x - 6z - 2) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

imponendo il passaggio per  $A$  si ottiene

$$\lambda(5 - 12 - 2) + \mu(-3 + 4 - 1) = 0 \Rightarrow -9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

per cui posto  $\mu = 1$  il piano per  $A$  ha equazione

$$y + 2z - 1 = 0$$

La retta  $s$  in forma cartesiana ha equazione:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani di asse  $s$  ha equazione

$$\lambda(3x - 2y - 8) + \mu(5y + 3z + 2) = 0$$

imponendo il passaggio per  $A$  si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda(15 + 6 - 8) + \mu(-15 + 6 + 2) &= 0 \Rightarrow -9\lambda = 0 \Rightarrow \\ 13\lambda - 11\mu &= 0 \end{aligned}$$

in essa per  $\mu = 1$   $\lambda = \frac{11}{13}$  e l'equazione del piano per s è

$$33x + 43y + 39z - 62 = 0$$

Allora la retta cercata ha equazione

$$\begin{cases} 33x + 43y + 39z - 62 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

#### ESERCIZIO4b (II – III mod.; III mod.)

Bisogna discutere le soluzioni del sistema costituito dalle equazioni delle due rette, cioè del sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - hy = h \\ x - z = h \end{cases}$$

Consideriamo la matrice A dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -h & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determiniamone il rango attraverso il teorema degli orlati; partiamo dal minore di ordine 2

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

e consideriamo l'orlato di ordine 3 che si ottiene aggiungendo la terza colonna e la quarta riga

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Per cui  $r(A) = 3$ .

Calcoliamo il determinante della matrice completa A' per determinarne il rango e stabilire la compatibilità del sistema

$$\text{Det}(A') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -h & 0 & h \\ 1 & 0 & -1 & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -h & h \\ 1 & -1 & h \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -h & h \\ 1 & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -h & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 - 2h + 1 = 0 \Rightarrow (h - 1)^2 = 0 \Rightarrow h = 1$$

$r(A') = 4$  per  $h \neq 1$  e  $r(A') = 3$  per  $h = 1$ .

Pertanto per  $h = 1 \Rightarrow r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow$  il sistema è compatibile  $\Rightarrow$  le rette sono incidenti e l'unica soluzione si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

La terna di soluzioni si può calcolare con le formule di Cramer ricordando che è  $\text{Det}(A) = 2$ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0$$

quindi il punto d'intersezione è  $P(1, 0, 0)$ .

Per  $h \neq 1$   $r(A) = 3$  e  $r(A') = 4$ , bisogna stabilire se le rette sono parallele o sghembe.

Consideriamo i parametri direttori delle rette  $r$  ed  $s$ :

$$l_r = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad m_r = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad n_r = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$l_s = \begin{vmatrix} -h & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = h; \quad m_s = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad n_s = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = h$$

Per essere le rette parallele deve esistere un valore reale di  $h$  per cui i vettori

$$\mathbf{v}(1, -1, -1) \text{ e } \mathbf{w}(h, -1, h)$$

siano direttamente proporzionali, ma ciò non è verificato per alcun valore reale di  $h$ ; pertanto le rette sono sghembe.

#### ESERCIZIO4c (II – III mod.)

Il piano richiesto deve appartenere al fascio di piani di asse  $r$  che ha equazione

$$\begin{aligned} \lambda(2x - y + 1) + \mu(x - y - z) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2\lambda + \mu)x - (\lambda + \mu)y - \mu z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Imponiamo ora che un piano del fascio sia parallelo al vettore  $\mathbf{v}(1, 2, 3)$ ; essendo

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

la condizione di parallelismo, nel caso specifico si ha

$$\begin{aligned} 1(2\lambda + \mu) - 2(\lambda + \mu) - 3\mu &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4\mu &= 0 \Rightarrow \mu = 0 \end{aligned}$$

Pertanto posto  $\lambda = 1$  l'equazione del piano richiesto è

$$2x - y + 1 = 0.$$

#### ESERCIZIO4d (solo III mod.)

Scriviamo l'equazione del generico piano passante per il punto P(2, 1, -1):

$$a(x - 2) + b(y - 1) + c(z + 1) = 0$$

ed imponiamo la condizione di parallelismo con la retta data.

I parametri direttori della retta sono

$$l = 1 \quad m = 2 \quad n = 1$$

per cui per la condizione di parallelismo  $al + bm + cn = 0$  si dovrà avere

$$a + 2b + c = 0$$

la condizione di perpendicolarità con il piano dato invece è data da

$$3a + 2b - c = 0$$

I coefficienti del piano richiesti si otterranno come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases}$$

Considerata la matrice A dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

esiste il minore

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Pertanto  $r(A) = 2$ , il sistema è compatibile e ammette  $\infty^1$  soluzioni che si ottengono, posto  $c = t$ , risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a + 2b = -t \\ 3a + 2b = t \end{cases}$$

Applicando le formule di Cramer si ha:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -t & 2 \\ t & 2 \end{vmatrix}}{-4} = t \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ 3 & t \end{vmatrix}}{-4} = -t$$

e ponendo  $t = 1$  si hanno i valori  $a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1$

Pertanto sostituendo tali valori nell'equazione del piano passante per P si ottiene

$$\begin{aligned} x - 2 + y - 1 + z + 1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

che è l'equazione del piano richiesto.

#### ESERCIZIO4e (Geometria)

Ricordando che i coefficienti  $a, b$  dell'equazione cartesiana  $ax + by + c = 0$  di una retta sono le componenti di un vettore perpendicolare ad essa, la retta richiesta ha equazione

$$2(x - 1) - (y - 2) = 0.$$

Le equazioni parametriche di una generica retta per A(1, 2) sono

$$\begin{cases} x = 1 + l t \\ y = 2 + m t \end{cases}$$

Essa risulta perpendicolare al vettore  $\mathbf{v}(2, -1)$  se e solo se

$$2l - m = 0 \Rightarrow m = 2l$$

Sostituiti tali valori nelle equazioni parametriche e posto  $l = 1$  si ha  $m = 2$  e quindi

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$