

APPLICAZIONI LINEARI e MATRICI ASSOCIATE

Data un'applicazione $f: V \rightarrow W$ con V e W spazi vettoriali si dice che f è un'**applicazione lineare** o **omomorfismo** $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) & \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \\ f(\alpha \mathbf{v}) &= \alpha f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{0}_V$ e $\mathbf{0}_W$ sono i vettori nulli di V e di W , ovviamente risulta

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

Se un vettore $\mathbf{v} \in V$ è combinazione lineare di p vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in V$ con coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_p$, allora il vettore $f(\mathbf{v}) \in W$ immagine di $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_p)$ secondo gli stessi coefficienti, cioè

$$f(\mathbf{v}) = f(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_p \mathbf{v}_p) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + a_p f(\mathbf{v}_p).$$

In particolare se V ha dimensione finita n e $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di V , allora il vettore $f(\mathbf{v})$, immagine di un $\mathbf{v}$ di V , è combinazione lineare delle immagini dei vettori della base B con coefficienti che coincidono con le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a B , cioè se

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n \Rightarrow \\ f(\mathbf{v}) &= f(x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + x_2 f(\mathbf{u}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n). \end{aligned}$$

Data $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di V in W , l'insieme degli elementi di W che sono immagini di almeno un elemento di V si dice **immagine dell'applicazione** e si indica con $f(V)$ o con $\text{Im } f$.

Si dimostra che

Teorema

L'immagine $f(V)$ di un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di W .

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di V in W ; si definisce **nucleo** di f e si denota con $\text{Ker } f$ l'insieme di tutti gli elementi di V che hanno per immagine il vettore nullo $\mathbf{0}_W$, cioè

$$\text{Ker } f = \{x \in V : f(x) = \mathbf{0}_W\}$$

Si dimostra che

Teorema

Il nucleo di un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Siano dunque V e W due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n ed m e siano

$$B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \quad \text{e} \quad B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$$

due basi di V e W .

Se $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di V in W ; si possono rappresentare i valori di ogni $f(\mathbf{v}_j)$ come

$$f(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mj}\mathbf{w}_m$$

Quindi la matrice $m \times n$ costituita da tutti gli a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) è quella delle coordinate dei vettori $f(\mathbf{v}_j) \in W$ rispetto alla base B' per $j = 1, 2, \dots, n$. Essa si dice **matrice associata ad f** rispetto alle basi B e B' ; esplicitamente la **matrice associata** all'applicazione f è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Risulta inoltre che

- $\dim \text{Im } f = r(A)$, dove A è una matrice associata ad f ;
- $\dim \text{Ker } f = \dim V - \dim \text{Im } f$.

ESEMPI

- Se si considera la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ad essa è associata l'applicazione

lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 5x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

avendo considerato come basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ le basi canoniche.

Viceversa se si considera l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_3 + x_4, x_2 - 7x_3 + 3x_4, x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4)$$

ad essa è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

➤ ESERCIZIO

Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

1. $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_1(x, y) = (x + y, 2x - y, y - x)$;
2. $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f_2(a, b, c) = (a + 2b - c, a - b - c)$;
3. $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f_3(a, b) = (a^2, a + b)$;
4. $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_4(x, y, z) = (x, y, z) + (1, 0, 1)$;
5. $f_5: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_5(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$;
6. $f_6: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f_6(x, y) = (x - y, x + y + 1)$

Soluzione

1. Si tratta di verificare che $\forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ risulti
 $f_1(\lambda(x, y) + \mu(z, w)) = \lambda f_1(x, y) + \mu f_1(z, w)$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x, y) + \mu(z, w)) &= f_1(\lambda x + \mu z, \lambda y + \mu w) = \\ &= (\lambda x + \mu z + \lambda y + \mu w, 2\lambda x + 2\mu z - \lambda y - \mu w, \lambda y + \mu w - \lambda x - \mu z) = \\ &= \lambda(x + y, 2x - y, y - x) + \mu(x + y, 2x - y, y - x) = \lambda f_1(x, y) + \mu f_1(z, w) \Rightarrow \\ &f_1 \text{ è lineare} \end{aligned}$$

2. Analogamente si procede per dimostrare che la f_2 è lineare.

Considerate le terne (a, b, c) e (x, y, z) in $\mathfrak{R}^3$ e $\forall \lambda, \mu$ in $\mathfrak{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f_2(\lambda(a, b, c) + \mu(x, y, z)) &= f_2(\lambda a + \mu x, \lambda b + \mu y, \lambda c + \mu z) = \\ &= (\lambda a + \mu x + 2\lambda b + 2\mu y - \lambda c - \mu z, \lambda a + \mu x - \lambda b - \mu y - \lambda c - \mu z) = \\ &= \lambda(a + 2b - c, a - b - c) + \mu(x + 2y - z, x - y - z) = \\ &= \lambda f_2(a, b, c) + \mu f_2(x, y, z) \Rightarrow f_2 \text{ è lineare.} \end{aligned}$$

3. La f_3 non è lineare.

A tale fine consideriamo le coppie $(1, 0)$ e $(1, 1)$ e facciamo vedere che

$$f_3((1, 0) + (1, 1)) \neq f_3(1, 0) + f_3(1, 1)$$

Si ha

$$f_3((1, 0) + (1, 1)) = f_3(2, 1) = (4, 3)$$

e

$$f_3(1, 0) + f_3(1, 1) = (1, 1) + (1, 2) = (2, 3)$$

da cui

$$(4, 3) \neq (2, 3).$$

4. La f_4 non è lineare.

Infatti considerate le terne $(-1, 1, 0)$ e $(0, -2, 1)$ si ha

$$f_4((-1, 1, 0) + (0, -2, 1)) = f_4(-1, -1, 1) = (-1, -1, 1) + (1, 0, 1) = (0, -1, 2)$$

$$f_4(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) + (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

$$f_4(0, -2, 1) = (0, -2, 1) + (1, 0, 1) = (1, -2, 2)$$

quindi

$$f_4(-1, 1, 0) + f_4(0, -2, 1) = (0, 1, 1) + (1, -2, 2) = (1, -1, 3)$$

cioè

$$f_4((-1, 1, 0) + (0, -2, 1)) = (0, -1, 2) \neq (1, -1, 3) = f_4(-1, 1, 0) + f_4(0, -2, 1).$$

Inoltre per essere lineare dovrebbe essere

$$f_4(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

invece risulta

$$f_4(0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (1, 0, 1) = (1, 0, 1).$$

5. La f_4 è un endomorfismo.

Infatti considerati v e w di $\mathfrak{R}^3$ e λ, μ in $\mathfrak{R}$ risulta

$$f_5(\lambda v + \mu w) = 2\lambda v + 2\mu w = \lambda(2v) + \mu(2w) = \lambda f_5(v) + \mu f_5(w).$$

6. La f_6 non è lineare.

Infatti considerata la coppia $(0, 0)$ si ha

$$f_6(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0).$$

➤ ESERCIZIO

Sia data l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (-x + 2y + 3z, x - 4y - 6z, x + z)$$

determiniamo la matrice associata all'applicazione f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$f(1, 0, 0) = (-1, 1, 1); \quad f(0, 1, 0) = (2, -4, 0); \quad f(0, 0, 1) = (3, -6, 1).$$

Quindi la matrice associata all'applicazione f è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ ESERCIZIO

Sia data l'applicazione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(a, b, c) = (a + b, 2c, a^2 - b^2)$$

provare che la f non è lineare.

Consideriamo $\mathbf{v}(1, 2, 0)$ e $\mathbf{w}(0, 1, 2)$; si ha

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f((1, 2, 0) + (0, 1, 2)) = f(1, 3, 2) = (4, 4, -8);$$

$$\text{inoltre } f(\mathbf{v}) = f(1, 2, 0) = (3, 0, -3) \quad f(\mathbf{w}) = f(0, 1, 2) = (1, 4, -1) \quad \text{da cui}$$

$$f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = (3, 0, -3) + (1, 4, -1) = (4, 4, -4) \neq (4, 4, -8) = f(\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

➤ ESERCIZIO

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$f(1, 0, 0) = (1, 1) \quad f(0, 1, 0) = (1, 0) \quad f(0, 0, 1) = (1, 1)$$

a) determinare la matrice A associata ad f e le equazioni di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$;

b) trovare una base e la dimensione di $\text{Im } f$ e di $\text{Ker } f$.

Soluzione

a) La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\mathbf{v}(x, y, z)$ è il generico vettore di $\mathbb{R}^3$, posto $f(\mathbf{v}) = (x', y')$ le equazioni della f rispetto alle basi canoniche sono:

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + z \end{cases}$$

b) poichè $\text{Im } f$ è generato dalle immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha $\text{Im } f = ((1, 1), (1, 0), (1, 1)) = \mathbb{R}^2$ allora una base di $\text{Im } f$ è $\{(1, 1), (1, 0)\}$ e la $\dim \text{Im } f = 2 = r(A)$.

Per definizione $\text{Ker } f = \{\mathbf{v} = (x, y, z) : f(\mathbf{v}) = (0, 0)\}$, quindi un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \text{Ker } f$ se e solo se le sue coordinate rispetto alla base canonica soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Allora il $\text{Ker } f$ è il sottospazio vettoriale costituito dalle soluzioni del sistema. Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(h, 0, -h) \forall h \in \mathbb{R}$, quindi una base di $\text{Ker } f$ è $\{1, 0, -1\}$ e $\dim \text{Ker } f = 1$.