

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n .

Dicesi **endomorfismo** di V ogni applicazione lineare

$$f : V \rightarrow V$$

dello spazio vettoriale in sé.

Se f è un endomorfismo di V in V , considerata una base nel dominio V ed una nel codominio V , eventualmente eguali fra loro, esiste una ben determinata matrice quadrata A di ordine n eguale alla dimensione di V .

Allora ogni endomorfismo $f : V \rightarrow V$ si può rappresentare come

$$Y = A X$$

con X e Y matrici colonna delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{v})$ rispetto alla base scelta in V e A matrice quadrata associata ad f .

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di V in sé.

Si dice **autovettore** di f ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ tale che

1. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

2. $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lo scalare λ viene detto **autovalore** di f e $\mathbf{v}$ chiamasi **autovettore** relativo all'autovalore λ .

Ciò significa che l'immagine di $\mathbf{v}$ tramite f è un multiplo di $\mathbf{v}$ stesso.

L'insieme degli autovalori di f si dice **spettro** di f .

Si osservi che la condizione 1) è essenziale; infatti se così non fosse tutti i numeri reali c sarebbero autovalori corrispondenti a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, in quanto $f(\mathbf{0}) = c \cdot \mathbf{0}$ è un'identità sempre verificata qualunque sia $c \in \mathbb{R}$.

Sussiste il seguente [teorema](#):

L'insieme $V(\lambda)$ costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di f relativi all'autovalore λ è un sottospazio vettoriale di V .

Il sottospazio $V(\lambda)$ costituito dal vettore nullo e da tutti gli autovettori di f relativi all'autovalore λ si dice **autospazio relativo all'autovalore λ** .

Per quanto osservato il sottospazio $V(\lambda)$ non può ridursi al solo vettore nullo e pertanto $\dim V(\lambda) \geq 1$.

Inoltre si dice **molteplicità geometrica** di λ , e si indica con $m_g(\lambda)$ la $\dim V(\lambda)$.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo di V in sé. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono autovettori relativi a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti tra loro, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Procediamo per induzione.

Se $n = 1$, l'autovettore $\mathbf{v}_1$ è diverso dal vettore nullo (per definizione) e quindi è linearmente indipendente.

Sia $n > 1$ e supponiamo che, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ distinti tra loro, essi siano linearmente indipendenti.

Sia allora $\mathbf{v}_n$ un autovettore relativo all'autovalore λ_n distinto da $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ e supponiamo, per assurdo, che $\mathbf{v}_n$ dipenda linearmente da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$, cioè che sia:

$$(1) \quad \mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}$$

Applicando l'endomorfismo f ad ambo i membri della (1) si ottiene:

$$(2) \quad f(\mathbf{v}_n) = \lambda_n \mathbf{v}_n = \alpha_1(\lambda_1 \mathbf{v}_1) + \alpha_2(\lambda_2 \mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} \mathbf{v}_{n-1})$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \alpha_2(\lambda_n - \lambda_2)\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$$

Poichè $\lambda_n \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ sono linearmente indipendenti per l'ipotesi induttiva, si ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Dalla (1) allora risulta $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ contro l'ipotesi che $\mathbf{v}_n$ sia autovettore.

Quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre si ha che:

Se $\dim V = n$, ogni endomorfismo $f: V \rightarrow V$ ha al più n autovalori distinti.

Vediamo come si possono determinare gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo.

Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo di V in sé.

Indicata con A la matrice associata ad f rispetto ad una base $B = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \}$ di V , se $\mathbf{x}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ e se X indica la matrice colonna delle coordinate di $\mathbf{x}$ rispetto a B , dall'essere

$$Y = A X$$

risulta

$$A \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}.$$

In altre parole se A è una matrice quadrata di ordine n ,

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore di A con autovalore $\lambda \Leftrightarrow A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

ESEMPI 1

Ogni vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ è autovettore della matrice identità $\mathbf{I}$ con autovalore 1.

Infatti

$$\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}$$

quindi lo spettro dell'identità è $\{ 1 \}$.

Generalizzando

Per ogni numero reale c ogni vettore $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ è autovettore della matrice $c\mathbf{I}$ con autovalore c . Infatti risulta

$$(cI) \mathbf{x} = c\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}$$

e lo spettro di cI è $\{c\}$.

Se $c = 0$ si ha lo spettro della matrice zero.

Indicata con I la matrice identità da $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ si ottiene

$$A \mathbf{x} - \lambda I \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

La (1) rappresenta un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite del tipo:

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_{11}-\lambda)\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{12}\,\mathbf{x}_2+...+\mathbf{a}_{1n}\,\mathbf{x}_n=0 \\ \mathbf{a}_{21}\,\mathbf{x}_1+(\mathbf{a}_{22}-\lambda)\mathbf{x}_2+...+\mathbf{a}_{2n}\,\mathbf{x}_n=0 \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\,\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{n2}\,\mathbf{x}_1+...+(\mathbf{a}_{nn}-\lambda)\,\mathbf{x}_n=0. \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzioni non nulle, essendo x diverso da zero, quando

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

cioè

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando tale determinante si ottiene un'equazione di grado n in λ , detta **equazione caratteristica**.

$$p_a(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

il polinomio $p_a(\lambda)$ è detto **polinomio caratteristico**.

Per il teorema fondamentale dell'Algebra questa equazione ammette n soluzioni

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

che rappresentano gli autovalori di A .

Pertanto

Se A è una matrice quadrata di ordine n , un numero reale λ è autovalore di A se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si dice **molteplicità algebrica** di un autovalore λ , e si indica con $m_a(\lambda)$, la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico, cioè il numero di volte che λ compare come soluzione dell'equazione caratteristica.

Si ha che: $\sum_{i=1}^n m_a(\lambda_i) = n$

Sussiste inoltre il seguente [teorema](#):

Se $f: V \rightarrow V$ è un endomorfismo di V in sé e λ_0 è un suo autovalore allora risulta

$$1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$$

ESEMPI 2

1. Si calcolino gli autovalori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione

Detto λ un autovalore di A deve essere $\det(A - \lambda I) = 0$ con I matrice identica di ordine 2.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Deve essere

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Quindi

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ e } \lambda = 4$$

Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda = -1$ e $\lambda = 4$.

Determiniamo gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -1$.

Consideriamo il sistema lineare relativo all'equazione $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Essendo, per $\lambda = -1$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

il sistema associato ad $(A + I)$ è:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Esso ammette infinite soluzioni.

Posto $x = y$ si ha :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

pertanto gli infiniti autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -1$ sono $\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Per $\lambda = 4$ si ottiene

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

il sistema associato ad $(A - 4I)$ è:

$$\begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Esso ammette infinite soluzioni.

Posto $x = -\frac{2}{3}y$ si ha :

$$\begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}$$

pertanto gli infiniti autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 4$ sono $\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i suoi autovalori, gli autospazi relativi agli autovalori e verifichiamo che gli autovettori associati agli autovalori sono linearmente indipendenti.

Soluzione

$$\underline{A - \lambda I} = \underline{\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1-\lambda)(-\lambda^2 + \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Gli autovalori di A quindi sono $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Calcoliamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = -1$

$$(A + I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Il sistema associato ad } (A + I) \text{ è:}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \text{ Esso ammette infinite soluzioni. Posto } x_3 = z, x_2 = y, x_1 = x \text{ si ha:}$$

$$\begin{cases} z = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Quindi l'autospazio associato a $\lambda_1 = -1$ è costituito dai vettori $\mathbf{x} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, con $x_3 \in \mathfrak{R}$

Con procedimento analogo si ottiene che l'autospazio associato a $\lambda_2 = 1$ è costituito dai vettori $\mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $x_2 \in \mathfrak{R}$ e l'autospazio associato a $\lambda_3 = 2$ è costituito dai

vettori $\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $x_1 \in \mathfrak{R}$.

Verifichiamo che i tre autovettori associati ai tre distinti autovalori sono linearmente indipendenti.

Basta far vedere che $\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. E si ottiene

$$\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcoliamo i suoi autovalori, gli autospazi relativi agli autovalori e verifichiamo se gli autovettori associati agli autovalori sono linearmente indipendenti.

Soluzione

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Quindi $\lambda = -1$ è autovalore di A.

Calcoliamo $(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'autospazio associato si ottiene risolvendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ha che l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = -1$ è

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, con $x_1 \in \mathbb{R}$, da ciò è immediato che non è possibile trovare due autovettori linearmente indipendenti tra loro.

Il polinomio caratteristico $p_a(\lambda)$ di una matrice quadrata A di ordine n gode delle seguenti proprietà:

- $p_a(\lambda)$ ha grado n e il coefficiente di λ^n è $(-1)^n$;
- il coefficiente di λ^{n-1} è $(-1)^{n-1} \sum_i a_{ii}$
- il termine noto è $\det(A)$, cioè $a_n = \det(A)$
- indicati con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A risulta $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

ESEMPI 3

1. Esistono matrici reali 2×2 che non hanno autovalori reali. Ogni matrice reale 3×3 ha almeno un autovalore reale.

Infatti se A è una matrice reale, il suo polinomio caratteristico è a coefficienti reali. Se A è dell'ordine 3, il polinomio caratteristico ha grado 3 e, quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, ha almeno una radice: la funzione reale $\lambda \rightarrow p_a(\lambda)$ assume valori positivi e negativi ed è continua; quindi il suo grafico interseca l'asse delle ascisse.

Se invece consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \det(A - \lambda I) = p_a(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_a(\lambda) = 1 + \lambda^2$, che non ha radici reali, ma solo le due radici complesse i e $-i$.

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- un suo autovalore λ è:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -5 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

- il polinomio caratteristico è $p_a(\lambda) = (1-\lambda)^3 = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3$;
- esso ha grado 3 (ordine della matrice A) e il coefficiente di λ^3 è $(-1)^3 = -1$ mentre il coefficiente di λ^2 è $(-1)^2(1 + 1 + 1) = 3$
- $a_n = 1 = \det(A)$
- essendo gli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- la molteplicità algebrica $m_a(\lambda) = m_a(1) = 3$

Proprietà degli autovalori

Sia A una matrice quadrata di ordine n e λ un suo autovalore allora:

- A e A^T (trasposta di A) hanno gli stessi autovalori
- Se A è non singolare allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}
- λ^p è autovalore di $A^p \quad \forall p \in \mathbb{N}$
- se A è ortogonale allora $|\lambda| = 1$
- $\lambda = 0$ è autovalore di $A \Leftrightarrow \det(A) = 0$

- gli autovalori di matrici diagonali e triangolari (inferiori e superiori) sono gli elementi della diagonale principale.

Due matrici quadrate A e B di ordine n si dicono **simili** se esiste una matrice non singolare¹ S tale che

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Si può dimostrare che

La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.

Sussiste la seguente proposizione:

se A e B sono matrici simili, allora

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$

quindi A e B hanno gli stessi autovalori con la stessa $m_a(\lambda)$.

Teorema

Siano A e B due matrici simili. Allora esse hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità algebrica e la stessa molteplicità geometrica.

Dimostrazione

Siano A e B due matrici simili e sia λ un autovalore di entrambe.

Fissiamo una matrice non singolare S tale che

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Se $\mathbf{v} \in V_A(\lambda)$, poniamo $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = S^{-1} \cdot \mathbf{v}$. allora risulta

$$B \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}) = B \cdot S^{-1} \cdot \mathbf{v} = S^{-1} \cdot S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot \mathbf{v} = S^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{v} = S^{-1} \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (S^{-1} \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v})$$

e pertanto $\mathbf{f}(\mathbf{v}) \in V_B(\lambda)$.

In altri termini abbiamo definito un'applicazione lineare $\mathbf{f}: V_A(\lambda) \rightarrow V_B(\lambda)$.

Analogamente si può definire

$$\mathbf{g}: V_B(\lambda) \rightarrow V_A(\lambda)$$

ponendo per $\mathbf{w} \in V_B(\lambda)$ $\mathbf{g}(\mathbf{w}) = S \cdot \mathbf{w}$.

E' immediato allora che l'applicazione composta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ è l'applicazione identica su $V_A(\lambda)$ e che $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ è l'applicazione identica su $V_B(\lambda)$. Quindi gli spazi $V_A(\lambda)$ e $V_B(\lambda)$ sono isomorfi e pertanto hanno la stessa dimensione, cioè la stessa molteplicità algebrica e geometrica.

Dato un endomorfismo $\mathbf{f}: V \rightarrow V$ esso si dice **diagonalizzabile** se è possibile trovare una base B di V rispetto alla quale la matrice quadrata associata ad $\mathbf{f}$ è una matrice diagonale.

¹ Una matrice quadrata A di ordine n è **non singolare** (o **regolare**) se $r(A) = n$, cioè se A ha rango massimo, cioè ancora se $\det(A) \neq 0$; in caso contrario A si dice **singolare**.

Sussiste la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ sia diagonalizzabile è che esiste una base B di V costituita da autovettori.

Dimostrazione

$\Rightarrow$

Se $f : V \rightarrow V$ è diagonalizzabile e

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è la matrice associata ad f rispetto ad una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di V , si ha:

$$f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

cioè i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sono gli autovettori associati agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$\Leftarrow$

Viceversa, se $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ è una base di autovettori di V relativa agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rispettivamente, allora si ha

$$f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1, f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2 \mathbf{u}_2, \dots, f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n \mathbf{u}_n$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto a B è proprio la matrice diagonale A .

Se f è diagonalizzabile allora la matrice ad essa associata rispetto ad una base di autovettori è una matrice diagonale la cui diagonale principale è costituita dagli autovalori corrispondenti, rispettivamente, agli autovettori della base.

Si dimostra che

Se f è un endomorfismo di V in sé diagonalizzabile, allora il suo polinomio caratteristico ha solo radici reali.

Vale inoltre la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perché un endomorfismo f di V in sé sia diagonalizzabile è che

- 1. il polinomio caratteristico abbia solo radici reali*
- 2. per ogni autovalore λ di f risulti $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.*

La diagonalizzabilità può essere definita anche in termini di matrici.

Una matrice quadrata A si dice **diagonalizzabile** se e solo se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esistono una matrice non singolare S ed una matrice diagonale D tali che:

$$D = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Si dimostra il seguente [teorema](#):

Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se ammette n autovettori linearmente indipendenti.

Esempi 4

1. La matrice dell'esempio 2.2 è diagonalizzabile. Infatti possiede tre autovettori linearmente indipendenti che formano la matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ponendo

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

risulta $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili: la matrice dell'esempio 3.1 non lo è, non possedendo due autovettori linearmente indipendenti.

2. Sia dato l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2y, -z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Trovare gli autovalori e gli autovettori di f
b) Stabilire se f è diagonalizzabile.

Soluzione

- a) La matrice associata ad f rispetto alla base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il $\det(A) = -2$ e quindi $r(A) = 3$.

Gli autovalori di f sono le soluzioni reali dell'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

Essi sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda_1 = 1$ sono le soluzioni del sistema ottenuto dalla $(A - \lambda I) X = 0$ in cui si è posto $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Quindi si ottengono le infinite soluzioni $k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathcal{R} - \{0\}$; pertanto gli

autovettori associati all'autovalore $\lambda_1 = 1$ sono $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analogamente per $\lambda_2 = 2$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono gli autovettori $x = h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall h \in \mathcal{R} - \{0\}$.

Infine per $\lambda_3 = -1$ si ha il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dal quale si ottengono gli autovettori $x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{R} - \{0\}$.

- b) L'endomorfismo f è diagonalizzabile poiché ammette tre autovettori reali e distinti.

Pertanto esiste una base di autovettori di f rispetto alla quale la matrice che rappresenta f è una matrice diagonale.