

1. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 5 & 8 - \alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 - \alpha & \alpha - 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Detta $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che ha A come matrice associata rispetto alle basi canoniche, si trovi $\text{Im } f$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Calcoliamo gli autovalori. Deve essere: $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha - 5 - \lambda & 8 - \alpha & -4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 6 - \alpha & \alpha - 8 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha - 5 - \lambda & -4 \\ 6 - \alpha & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)[(\alpha - 5 - \lambda)(5 - \lambda) + 4(6 - \alpha)] = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - \alpha\lambda + \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \alpha - 1 \end{cases}$$

Calcoliamo ora l'autospazio relativo agli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Deve essere: $AX = \lambda X \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \alpha - 5 & 8 - \alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 - \alpha & \alpha - 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\alpha - 6)x + (8 - \alpha)y - 4z = 0 \\ (6 - \alpha)x + (8 - \alpha)y - 4z = 0 \end{cases}$$

e poichè le equazioni del sistema sono linearmente dipendenti l'autospazio relativo è rappresentato dall'equazione del piano $(\alpha - 6)x + (8 - \alpha)y - 4z = 0$.

Dal momento che la molteplicità algebrica $m_a(\lambda) = 2$ è pari alla molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ dell'autospazio $= 2$, la matrice è diagonalizzabile $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$.

Infatti per $\alpha = 2$ si ha:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

e determinando l'autospazio relativo agli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ si ha

$$AX = \lambda X \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha - 5 & 8 - \alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 - \alpha & \alpha - 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4x + 6y - 4z = 0 \\ +4x - 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

e poiché le equazioni del sistema sono linearmente dipendenti l'autospazio relativo è rappresentato dall'equazione del piano $+4x - 6y + 4z = 0$.

In questo caso la molteplicità algebrica $m_a(\lambda) = 3$ non è pari alla molteplicità geometrica $m_g(\lambda)$ dell'autospazio $= 2$ e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Per determinare $\text{Im } f$ rispetto alla base canonica di $\mathfrak{R}^3$ si ha:

$$\begin{pmatrix} \alpha-5 & 8-\alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\alpha & \alpha-8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-5 \\ 0 \\ 6-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha-5 & 8-\alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\alpha & \alpha-8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-\alpha \\ 1 \\ \alpha-8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha-5 & 8-\alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\alpha & \alpha-8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ +5 \end{pmatrix}$$

da cui ovviamente

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha-5 & 8-\alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\alpha & \alpha-8 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinando il rango di A_f si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \alpha-5 & 8-\alpha & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6-\alpha & \alpha-8 & 5 \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

Per $\alpha \neq 1 \Rightarrow r(A_f) = 3 \Rightarrow \text{Im } f = \mathfrak{R}^3$

Per $\alpha = 1 \Rightarrow r(A_f) = 2 \Rightarrow \text{Im } f = \mathfrak{R}^2$.

2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & k-2 \\ k+1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

- determinare k in modo tale che f abbia autovalore uguale a 2;
- per i valori di k trovati, studiare i corrispondenti endomorfismi determinandone Immagine, autovalori e autospazi.

Soluzione

Ricordando che per la definizione di autovalore deve essere

$$|A - \lambda I| = 0$$

e sostituendo a λ il valore 2, si ha :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & k & k-2 \\ k+1 & 1-\lambda & 2k-1 \\ 0 & k & -k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ k+1 & -1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(k+1)(-k^2 - 2k - k^2 + 2k) = 0 \Rightarrow -(k+1)(-2k^2) = 0 \Rightarrow k_1 = -1 \text{ e } k_2 = 0.$$

a) Per $k_1 = -1$ la matrice associata in base canonica all'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

quindi $\text{Im}A$ rispetto alla base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$$

Calcoliamo gli autovalori. Deve essere $|A - \lambda I| = 0$, quindi:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}; \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}.$$

Quindi per i relativi autospazi deve essere:

$$AX = \lambda X$$

Pertanto se

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -y - 3z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

quindi l'autospazio relativo, essendo le equazioni del sistema linearmente dipendenti, ha equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Se

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 - \sqrt{3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{3})x - y - 3z = 0 \\ \sqrt{3}y - 3z = 0 \\ -y + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

quindi l'autospazio relativo, essendo le equazioni del sistema linearmente dipendenti, ha equazioni:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}z \\ y = \sqrt{3}z \end{cases}$$

Se

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 + \sqrt{3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{3})x - y - 3z = 0 \\ -\sqrt{3}y - 3z = 0 \\ -y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

quindi l'autospazio relativo, essendo le equazioni del sistema linearmente dipendenti, ha equazioni:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{3}z \\ y = -\sqrt{3}z \end{cases}$$

b) Per $k_I = 0$ la matrice associata in base canonica all'endomorfismo di $\mathfrak{R}^3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathbf{Im}A$ rispetto alla base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Im}A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \mathfrak{R}^3$$

Calcoliamo gli autovalori. Deve essere $|A - \lambda I| = 0$, quindi:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -2 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 1.$$

Quindi per i relativi autospazi deve essere:

$$AX = \lambda X$$

Pertanto se

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

quindi l'autospazio relativo ha equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Se

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

quindi l'autospazio relativo ha equazioni:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

quindi l'autospazio relativo ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Scrivere le equazioni della retta passante per $A(5; -3; 2)$ che interseca le rette :
 $r = (2 + 6t, 1 - 2t, t)$ ed $s = (4 + 2u, 2 + 3u, -4 - 5u)$

Soluzione

La retta richiesta si ottiene come intersezione dei piani che rispettivamente contengono la retta r e il punto A , la retta s e il punto A .

Le equazioni cartesiane della retta r , posto $z = t$, sono:

$$\begin{cases} x - 6z - 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio di piani di asse r è :

$$\lambda(x - 6z - 2) + \mu(y + 2z - 1) = 0$$

imponendo che il punto A vi debba appartenere si ha :

$$\lambda(5 - 12 - 2) + \mu(-3 + 4 - 1) = 0 \Rightarrow -9\lambda = 0$$

da cui

$\lambda = 0$ e, posto $\mu = 1$, il piano per A contenente r ha equazione:

$$y + 2z - 1 = 0$$

La retta s in forma cartesiana, posto $u = \frac{y}{3} - \frac{2}{3}$, ha equazioni:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 5y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

L'equazione del fascio di piani di asse s è:

$$\lambda(3x - 2y - 8) + \mu(5y + 3z + 2) = 0$$

imponendo che il punto A vi debba appartenere si ha :

$$\lambda(15 + 6 - 8) + \mu(-15 + 6 - 2) = 0 \Rightarrow 13\lambda - 11\mu = 0$$

posto $\mu = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{11}{13}$ il piano per A contenente s ha equazione:

$$33z + 43y + 39z - 62 = 0$$

e quindi la retta cercata è :

$$\begin{cases} 33z + 43y + 39z - 62 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Stabilire per quale valore di k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-5 & 0 & 4k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

possiede due autovalori uguali a 2 e verificare se, per tale valore, A è diagonalizzabile.

Soluzione

Calcoliamo gli autovalori. Deve essere $|A - \lambda I| = 0$, quindi:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} k-5-\lambda & 0 & 4k \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ (2-\lambda) \cdot [(k-5-\lambda)(9-\lambda) - 16k] &= 0 \Rightarrow \\ (2-\lambda)[\lambda^2 - (4+k)\lambda - 7k - 45] &= 0 \end{aligned}$$

sostituendo $\lambda = 2$ si ottiene :

$$-9k - 49 = 0 \Rightarrow k = -\frac{49}{9}$$

Per $k = -\frac{49}{9}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e quindi la molteplicità algebrica è 2.

Sostituendo il valore di k trovato in $|A - \lambda I| = 0$ si ha:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} \frac{112}{9} & 0 & -\frac{196}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e risulta $r(A - \lambda I) = 1$, poiché la molteplicità geometrica è 2 allora la matrice è diagonalizzabile.