

ESERCIZI sui VETTORI

1. Calcolare la somma di $\mathbf{v}_1 (2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (1, 4)$.
2. Calcolare la somma di $\mathbf{v}_1 (1, 5, 4)$ e $\mathbf{v}_2 (6, 8, 2)$.
3. Calcolare il prodotto di $\alpha = 2$ e $\mathbf{v}_1 (1, 4)$.
4. Calcolare il prodotto di $\alpha = 3$ e $\mathbf{v}_1 (2, 5, 4, 8)$.
5. Scrivere la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (2, 1)$ con gli scalari $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.
6. Verificare **che** i vettori $\mathbf{v}_1 (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (2, 1)$ sono linearmente indipendenti (L. I.)
7. Verificare **se** i vettori $\mathbf{v}_1 (-3, 2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 (4, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti (L. I.) o linearmente dipendenti (L. D.)
8. Verificare **se** i vettori $\mathbf{v}_1 (1, 2, -3)$ e $\mathbf{v}_2 \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$ sono L. I. o L. D.
9. Verificare **se**, al variare del parametro reale k , $\mathbf{v}_1 (k, 1)$ e $\mathbf{v}_2 (1, k)$ sono L. I. o L. D.
10. Verificare per quali valori del parametro reale k $\mathbf{v}_1 (k+1, 0, 1)$ $\mathbf{v}_2 (1, k^2, -1)$ $\mathbf{v}_3 (-1, k, 0)$ sono L. I. o L. D.
11. Dati i vettori $\mathbf{v} (1, 2)$ $\mathbf{v}_1 (1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 (3, 2)$
 - verificare **che** $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono L. I.
 - stabilire se è possibile scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
12. Dati i vettori $\mathbf{v} (1, 1, 1)$ $\mathbf{v}_1 (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 (-1, 1, -1)$ stabilire **se** è possibile scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
13. Dati i vettori $\mathbf{v} (-1, 0, 0)$ $\mathbf{v}_1 (1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 (0, 0, 1)$ stabilire **se** è possibile scrivere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
14. Dati i polinomi di $\mathbf{P}_3$
 $x + x^2, 1 - x, 2x + 1, 3x^2 + 2$
verificare **se** essi sono L.I. o L.D.

15. Nello spazio vettoriale $\mathfrak{R}^4$ sono dati i vettori
 $\mathbf{v}_1 (1, 0, 0, -1)$ $\mathbf{v}_2 (0, 1, 1, 0)$ $\mathbf{v}_3 (0, -1, 0, 1)$ $\mathbf{v}_4 (0, 0, 1, 0)$
 - Verificare che essi costituiscono una base di $\mathfrak{R}^4$
 - Determinare le coordinate del vettore $\mathbf{v} (1, 0, 1, 1)$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
16. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori non paralleli. Stabilire per quali valori del parametro reale a il vettore $-a \mathbf{u} + 2 \mathbf{v}$ è parallelo a $2 \mathbf{u} - a \mathbf{v}$.
17. Dati i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, se $|\mathbf{u}| = 2$, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$ e l'angolo $\angle uv = \frac{\pi}{6}$ calcolare $|\mathbf{v}|$.
18. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tre vettori di modulo $\sqrt{2}$ a due a due ortogonali. Determinare l'espressione dei vettori ortogonali a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
19. Determinare in $\mathfrak{R}^3$ i vettori ortogonali sia a $\mathbf{v}_1 (1, 0, 1)$ che a $\mathbf{v}_2 (0, 0, 1)$.
20. Determinare per quale valore del parametro reale k i vettori $\mathbf{u} (k, -1, 3)$ e $\mathbf{v} (k, 2k, -5)$ sono ortogonali.
21. Determinare l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori $\mathbf{v}_1 (1, 3, 0)$ $\mathbf{v}_2 (3, 3, -3)$ $\mathbf{v}_3 (2, 0, -3)$.
22. Dati i vettori $\mathbf{v} (1, h, 2)$ e $\mathbf{w} (2k, 1, 4k)$,
 - determinare i parametri reali h e k in modo tale che $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$;
 - determinare i parametri reali h e k in modo tale che $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$.
23. Dati i vettori $\mathbf{v} (1, h, 2)$ $\mathbf{w} (2k, 1, 4k)$ $\mathbf{u} (2, 1, -1)$
 - determinare il parametro reale h in modo tale che $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$;
 - verificare se esiste k reale tale che sia $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$
24. Determinare il valore del parametro reale h in modo che i tre vettori $\mathbf{v} (h, 1, 0)$ $\mathbf{w} (1, 1, 0)$ $\mathbf{u} (h + 1, 0, 1)$ siano tra loro ortogonali.
25. Dati in $\mathfrak{R}^4$ i vettori $\mathbf{u} (0, 1, 1, 0)$ $\mathbf{v} (-1, -1, 0, 0)$ $\mathbf{z} (-1, 0, 0, 1)$, si determini l'insieme di tutti i vettori ortogonali a $\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{z}$.

SOLUZIONI

ES. 1

La somma di $\mathbf{v}_1 (2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (1, 4)$ è data da

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (2+1, 3+4) = (3, 7)$$

ES. 2

La somma di $\mathbf{v}_1 (1, 5, 4)$ e $\mathbf{v}_2 (6, 8, 2)$ è data da

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (1+6, 5+8, 4+2) = (7, 13, 6)$$

ES. 3

Il prodotto di $\alpha = 2$ e $\mathbf{v}_1 (1, 4)$ è dato da

$$2 \cdot \mathbf{v}_1 = (2 \cdot 1, 2 \cdot 4) = (2, 8)$$

ES. 4

Il prodotto di $\alpha = 3$ e $\mathbf{v}_1 (2, 5, 4, 8)$ è dato da

$$3 \cdot \mathbf{v}_1 = (3 \cdot 2, 3 \cdot 5, 3 \cdot 4, 3 \cdot 8) = (6, 15, 12, 24)$$

ES. 5

Una combinazione lineare di due vettori è del tipo

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \quad \text{con } \alpha \text{ e } \beta \text{ reali}$$

Quindi la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (2, 1)$ con gli scalari $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ è data da

$$2 \cdot \mathbf{v}_1 + 3 \cdot \mathbf{v}_2 = 2 \cdot (1, 3) + 3 \cdot (2, 1) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = (8, 9).$$

ES. 6

Considerata l'equazione

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = 0$$

calcoliamo i valori di α e β che la verificano.

L'equazione precedente equivale alla seguente

$$\alpha (1, 3) + \beta (2, 1) = (0, 0)$$

Per calcolare le sue soluzioni risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ -6\beta + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Poiché l'unica soluzione è quella **banale** i due vettori sono L. I.

NOTA

Per verificare **se** due vettori sono L. D. è sufficiente vedere se sono uno multiplo dell'altro.

ESEMPIO

Dati i vettori dell'esercizio precedente $\mathbf{v}_1 (1, 3)$ e $\mathbf{v}_2 (2, 1)$ basta vedere se esiste un numero reale α tale che $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$, cioè $(1, 3) = \alpha (2, 1)$ che equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha \\ 3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 6 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

il quale **non** ha soluzione e pertanto $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono L. I.

Inoltre i due vettori, essendo L.I., costituiscono una base per $\mathbb{R}^2$.

ES. 7

Considerata l'equazione

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = 0$$

calcoliamo i valori di α e β che la verificano.

L'equazione precedente equivale alla seguente

$$\alpha (-3, 2, 1) + \beta (4, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

Per calcolare le sue soluzioni risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Poiché l'unica soluzione è quella **banale** i due vettori sono L. I.

Un altro modo per verificare che i vettori dati sono L. I. è far vedere che non esiste nessun numero reale α tale che $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$, cioè tale che $(-3, 2, 1) = \alpha (4, 1, 0)$.

Allora basta considerare il sistema

$$\begin{cases} 4\alpha = -3 \\ \alpha = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

che non ammette soluzioni e pertanto i due vettori sono L. I.

ES. 8

Lo studente svolga tale esercizio.

ES. 9

Considerata l'equazione

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = 0$$

cioè

$$\alpha (k, 1) + \beta (1, k) = 0$$

bisogna discutere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} k\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + k\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -k\alpha \\ \alpha - k^2\alpha = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k .

Risulta

$$1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1.$$

Se $k = \pm 1$ il sistema, essendo indeterminato, ammette infinite soluzioni e i vettori sono L. D.

Se $k \neq \pm 1$ il sistema ammette la sola soluzione banale e i vettori sono L. I.

ES. 10

Considerata l'equazione

$$a \mathbf{v}_1 + b \mathbf{v}_2 + c \mathbf{v}_3 = 0$$

cioè

$$a(k+1, 0, 1) + b(1, k^2, -1) + c(-1, k, 0) = (0, 0, 0)$$

bisogna discutere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (k+1)a + b - c = 0 \\ k^2b + kc = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(k+1)b - c = 0 \\ k^2b + kc = 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = (k+2)b \\ (2k^2 + 2k)b = 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = (k+2)b \\ 2k(k+1)b = 0 \\ a = b \end{cases}$$

al variare del parametro reale k .

Risulta

$$2k(k+1) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ e } k = -1.$$

Se $k = 0$ e $k = -1$ il sistema è indeterminato e ammette infinite soluzioni, quindi i tre vettori sono L. D.

Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ il sistema ammette la sola soluzione nulla e i tre vettori sono L. I.

ES. 11

- Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ fossero L. D. allora dovrebbe esistere un numero reale α tale che $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$, cioè dovrebbe risultare $(1, 1) = \alpha(3, 2)$, ma il sistema

$$\begin{cases} 3\alpha = 1 \\ 2\alpha = 1 \end{cases}$$

è impossibile e pertanto i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono L. I.

- Per scrivere $\mathbf{v}(1, 2)$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ bisogna determinare i numeri reali α e β perché risulti

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

cioè

$$\alpha(1, 1) + \beta(3, 2) = (1, 2)$$

Consideriamo allora il sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

che risolto dà

$$\begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\mathbf{v} = -2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

ES. 12

Per scrivere $\mathbf{v} (1, 1, 1)$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ bisogna stabilire se esistono i numeri reali α e β tali che

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

cioè

$$\alpha (1, 1, 1) + \beta (-1, 1, -1) = (1, 1, 1)$$

Quindi bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

sommando tra loro le prime equazioni si ha $0 = 2$, pertanto il sistema è impossibile e non esiste una combinazione lineare di $\mathbf{v}$ in funzione di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

NOTA

Il fatto che il sistema non abbia soluzione vuol dire che i tre vettori sono L.I. Viceversa se un vettore si può scrivere come combinazione lineare degli altri due implica che essi sono L.D.

ES. 13

Perché $\mathbf{v}$ sia combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ deve verificarsi

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

cioè

$$\alpha (0, -1, 0) + \beta (0, 0, 1) = (-1, 0, 0).$$

Il sistema equivalente alla equazione è

$$\begin{cases} 0 = -1 \\ -\alpha = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases}$$

manifestamente impossibile.

Pertanto non esistono α e β tali da verificare l'equazione data e i tre vettori sono L.I.

ES. 14

Per essere i polinomi dati L.I. l'equazione

$$a(x + x^2) + b(1 - x) + c(2x + 1) + d(3x^2 + 2) = (0, 0, 0, 0)$$

deve ammettere la sola soluzione nulla.

Pertanto consideriamo l'equazione

$$(a + 3d)x^2 + (a - b + 2c)x + (b + c + 2d) = 0.$$

Per il principio di identità dei polinomi il polinomio a primo membro è identicamente nullo se e solo se lo sono tutti i suoi coefficienti; allora calcoliamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a + 3d = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ b + c + 2d = 0 \end{cases}$$

che risulta dà

$$\begin{cases} a = -9c \\ b = -7c \\ d = 3c \end{cases}$$

Il parametro c non è determinato; in particolare è evidente che al variare di c si hanno infinite soluzioni non nulle del sistema. Quindi i polinomi dati non sono linearmente indipendenti.

ES. 15

Ricordiamo che

un insieme di n vettori di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ si dice *sistema di generatori* di $\mathbf{V}$ se ogni vettore di $\mathbf{V}$ si può esprimere come loro combinazione lineare.

Inoltre gli n vettori costituiscono una *base* per $\mathbf{V}$ se essi sono L. I.

- Cominciamo con il provare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono L.I.

A tale scopo consideriamo l'equazione

$$a \mathbf{v}_1 + b \mathbf{v}_2 + c \mathbf{v}_3 + d \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

cioè

$$a(1, 0, 0, -1) + b(0, 1, 1, 0) + c(0, -1, 0, 1) + d(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - c = 0 \\ b + d = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

che, come si verifica facilmente, ammette la sola soluzione nulla e quindi i vettori dati sono L.I.; inoltre essi, ricordando che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è 4, ne sono un sistema di generatori. Si può quindi concludere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$.

- Il vettore $\mathbf{v}(1, 0, 1, 1)$ allora si può esprimere in unico modo come combinazione lineare della base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Considerata allora la relazione

$$x \mathbf{v}_1 + y \mathbf{v}_2 + z \mathbf{v}_3 + t \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}$$

e cioè

$$x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 1, 0) + z(0, -1, 0, 1) + t(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 1)$$

le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \\ y + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$-x + z = 1 \qquad z = 2$$

sono le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a tale base, cioè risulta $\mathbf{v} (1, 2, 2, -1)$.

ES. 16

Ricordiamo che due vettori sono *paralleli* se e solo se sono L.D.; pertanto se essi sono paralleli uno dei due deve essere multiplo dell'altro.

Quindi deve esistere un numero λ tale che

$$2 \mathbf{u} - a \mathbf{v} = \lambda (-a \mathbf{u} + 2 \mathbf{v})$$

Questa equazione è equivalente alla seguente

$$(2 + \lambda a) \mathbf{u} - (2 \lambda + a) \mathbf{v} = (0, 0)$$

Essendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ L.I. deve risultare

$$\begin{cases} 2 + \lambda a = 0 \\ 2 \lambda + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda^2 = 0 \\ a = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ a = \pm 2 \end{cases}$$

ES. 17

Il prodotto scalare tra due vettori è dato da

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u v \cos \alpha$$

con α angolo formato dai vettori dati.

Nel nostro caso quindi si ha

$$3 = 2 v \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \sqrt{3}$$

ES. 18

Due vettori sono *ortogonali* se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Inoltre, nel nostro caso, i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, essendo a due a due ortogonali e non nulli, sono L.I. e quindi costituiscono una base.

Allora un generico vettore $\mathbf{t}$ può essere espresso come combinazione lineare di questa base, cioè

$$\mathbf{t} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

Se $\mathbf{t}$ deve essere ortogonale a $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ si deve avere $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori, per il teorema di rappresentazione, è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omonime, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \\ a\mathbf{u}^2 - a\mathbf{u}\mathbf{v} + b\mathbf{u}\mathbf{v} - b\mathbf{v}^2 + c\mathbf{w}\mathbf{u} - c\mathbf{w}\mathbf{v} &= 0 \Rightarrow \\ a\mathbf{u}^2 - b\mathbf{v}^2 &= 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Pertanto i vettori richiesti sono tutti e soli quelli del tipo

$$\mathbf{t} = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

ES. 19

Il generico vettore di $\mathbb{R}^3$ è del tipo $\mathbf{v}(x, y, z)$. Quindi, per essere $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ deve risultare il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1$ nullo, cioè

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$$

Ne segue che i vettori ortogonali a $\mathbf{v}_1(1, 0, 1)$ sono del tipo $\mathbf{v}(x, y, -x)$.

Poiché $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$ deve allora risultare

$$(x, y, -x) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow -x = 0$$

Allora i vettori richiesti sono della forma $\mathbf{v}(0, y, 0)$.

ES. 20

Per essere ortogonali i due vettori deve essere nullo il loro prodotto scalare, cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 &\Rightarrow (k, -1, 3) \cdot (k, 2k, -5) = 0 \Rightarrow \\ k^2 - 2k - 15 &= 0 \Rightarrow k = 5 \text{ e } k = -3. \end{aligned}$$

ES. 21

Dato il generico vettore $\mathbf{v}(x, y, z)$ vogliamo determinare le sue coordinate perché esso sia ortogonale ai vettori $\mathbf{v}_1(1, 3, 0)$ $\mathbf{v}_2(3, 3, -3)$ $\mathbf{v}_3(2, 0, -3)$. Si deve avere:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

cioè simultaneamente

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 &= (x, y, z) \cdot (1, 3, 0) = 0 \Rightarrow x + 3y = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 &= (x, y, z) \cdot (3, 3, -3) = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 3z = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3 &= (x, y, z) \cdot (2, 0, -3) = 0 \Rightarrow 2x - 3z = 0 \end{aligned}$$

basterà allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ z = \frac{2}{3}x \\ x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che l'ultima equazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x , pertanto ogni vettore del tipo $\mathbf{v}(t, -\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t)$ è ortogonale ai vettori dati.

ES. 22

- Per essere $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ deve risultare nullo il prodotto scalare dei due vettori, cioè

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \Rightarrow (1, h, 2) \cdot (2k, 1, 4k) = 0$$

da cui risulta

$$2k + h + 8k = 0 \Rightarrow h = -10k$$

Pertanto, posto $k = t$, tutti i vettori del tipo $\mathbf{v}(1, -10t, 2)$ e $\mathbf{w}(2t, 1, 4t)$ sono perpendicolari fra loro.

- Per essere $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$ i due vettori devono essere uno multiplo dell'altro, cioè

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$$

Quindi deve risultare

$$(1, h, 2) = \lambda (2k, 1, 4k)$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2\lambda k = 1 \\ h = \lambda \\ 4\lambda k = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2\lambda} \text{ con } \lambda \neq 0 \\ h = \lambda \end{cases}$$

Pertanto tutti i vettori del tipo $\mathbf{v}(1, \lambda, 2)$ e $\mathbf{w}\left(\frac{1}{\lambda}, 1, \frac{1}{2\lambda}\right)$ con $\lambda \neq 0$ sono paralleli.

ES. 23

- Per essere $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ il loro prodotto scalare deve essere nullo, pertanto

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow (1, h, 2) \cdot (2, 1, -1) = 0$$

cioè

$$2 + h - 2 = 0 \Rightarrow h = 0$$

- Per essere $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ il loro prodotto scalare deve essere nullo, pertanto

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow (2k, 1, 4k) \cdot (2, 1, -1) = 0$$

cioè

$$4k + 1 - 4k = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

Essendo l'equazione impossibile non esiste alcun valore reale di k per cui i due vettori siano perpendicolari.

ES. 24

Per essere i tre vettori $\mathbf{v}(h, 1, 0)$ $\mathbf{w}(1, 1, 0)$ $\mathbf{u}(h+1, 0, 1)$ perpendicolari tra loro deve risultare contemporaneamente

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (h, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (h, 1, 0) \cdot (h+1, 0, 1) = 0$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (1, 1, 0) \cdot (h+1, 0, 1) = 0$$

queste condizioni equivalgono a risolvere il sistema

$$\begin{cases} h + 1 = 0 \\ h(h + 1) = 0 \\ h + 1 = 0 \end{cases}$$

il quale ammette per soluzioni $h = -1$ e $h = 0$.

ES. 25

Sia $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ di $\mathbb{R}^4$ il generico vettore di cui vogliamo calcolare le coordinate; esso deve essere perpendicolare ai tre vettori $\mathbf{u}(0, 1, 1, 0)$ $\mathbf{v}(-1, -1, 0, 0)$ $\mathbf{w}(-1, 0, 0, 1)$.

Pertanto deve risultare contemporaneamente

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = (x, y, z, t) \cdot (0, 1, 1, 0) = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = (x, y, z, t) \cdot (-1, -1, 0, 0) = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = (x, y, z, t) \cdot (-1, 0, 0, 1) = 0$$

Quindi per trovare le coordinate di **a** allora bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y \\ y = -x \\ t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = -x \\ t = x \end{cases}$$

Se si pone $x = h$ tutti i vettori del tipo **a** (h, -h, h, h) sono ortogonali a **u** **v** e **w**.