

UNIVERSITA' DEGLI STUDI "LA SAPIENZA" DI ROMA
POLO DI RIETI
FACOLTA' DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'AMBIENTE
E DEL TERRITORIO

Geometria – II esonero parziale

11 – 11 – 2005

A.A. 2005 – 2006

Cognome_____	Nome_____
Matricola_____	Codice_____
Scrivere in stampatello	

Quesiti (punti 2 per ciascun quesito)

Scegliere la risposta esatta **giustificandola** opportunamente:

1. Il sistema $AX = 0$ ammette

☐ una soluzione

☐ nessuna soluzione

☐ infinite soluzioni

2. Per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 3 & 5 \\ 0 & k & 7 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

☐ $k \neq 0$

☐ $\forall k \in \mathbb{R}$

☐ $k = 0$

3. Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due autovettori distinti di f relativi agli autovalori λ_1 e λ_2 . Il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ha dimensione

☐ 2

☐ 1

☐ 0.

Esercizi

1. Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 0 & k & 3k-6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. (Punti 8)

2. Discutere e risolvere al variare del parametro reale k il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3kx + 3y + (k + 2)z = k + 2 \\ x + 2y + 2z = k + 1 \\ x + ky + kz = 1 \end{cases}$$

(punti 10)

3. Data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f((x, y, z)) = (x + y + 1, z)$ stabilire se essa è lineare. (punti 6)

SOLUZIONI

QUESITI

1. Risposta: **una soluzione.**

Il sistema $AX = 0$ è un sistema lineare omogeneo e pertanto esso, se non viene fatta alcuna ipotesi sul rango della matrice dei coefficienti, ammette sempre la soluzione banale.

2. Risposta: $k \neq 0$

La matrice A è una matrice triangolare e pertanto gli autovalori sono tutti e soli gli elementi della diagonale principale. Per essere reali e distinti deve risultare quindi $k \neq 0$.

3. Risposta: la dimensione del sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è 2.

Infatti la dimensione di uno spazio vettoriale è pari al numero dei vettori di una sua base.

ESERCIZI

1. La matrice A è triangolare, pertanto gli autovalori sono tutti e soli gli elementi della diagonale principale:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} k-1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & k-\lambda & 3k-6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = k-1; \lambda_2 = k; \lambda_3 = 2.$$

Essi sono reali e distinti quando $k \neq 2$ e $k \neq 3$; per tali valori la matrice è diagonalizzabile.

Esaminiamo i casi $k = 2$ e $k = 3$.

Sia $k = 2$.

La matrice diventa

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\text{Det}(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \text{ quindi} \\ \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

Pertanto $\lambda_1 = 1$ è un autovalore con $m_a(1) = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, essendo contato due volte risulta $m_a(2) = 2$.

Per $\lambda_1 = 1$, essendo un autovalore semplice, si ha $m_a(1) = m_g(1) = 1$ e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Vediamo cosa accade per $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$$\text{Det}(A_2 - 2I) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché tutti i minori del secondo ordine sono nulli, avendo il Det due righe nulle, si ha $r(A_2 - 2I) = 1$, da cui

$$m_g(2) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(A_2 - 2I) = 3 - 1 = 2 \text{ e quindi } m_a(2) = m_g(2) = 2$$

e allora A è diagonalizzabile.

Sia $k = 3$.

La matrice diventa

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\text{Det}(A_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \text{ quindi } \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Pertanto $\lambda_1 = 3$ è un autovalore con $m_a(1) = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, essendo contato due volte risulta $m_a(2) = 2$.

Per $\lambda_1 = 3$, essendo un autovalore semplice, si ha $m_a(3) = m_g(3) = 1$ e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Vediamo cosa accade per $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$$\text{Det}(A_3 - 2I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché tutti i minori del secondo ordine sono nulli, essendo una riga nulla e due righe eguali tra loro, si ha $r(A_3 - 2I) = 1$, da cui

$$m_g(2) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(A_3 - 2I) = 3 - 1 = 2 \text{ e quindi } m_a(2) = m_g(2) = 2$$

e allora A è diagonalizzabile.

2. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 3k & 3 & k+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$$

Calcoliamone il determinante

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 3k & 3 & k+2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & k & k \end{vmatrix}$$

Si vede facilmente che risulta $\text{Det}(A) = k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)$.

Si ha $\text{Det}(A) = 0 \Rightarrow k = 1$ e $k = 2$.

Pertanto per $k \neq 1$ e $k \neq 2$ $\text{Det}(A) \neq 0$ e $r(A) = r(A') = 3 \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione che può essere calcolata con le formule di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & 3 & k+2 \\ k+1 & 2 & 2 \\ 1 & k & k \end{vmatrix}}{(k-1)(k-2)} = \frac{k^3 - 3k + 2}{(k-1)(k-2)} = \frac{(k-1)^2(k+2)}{(k-1)(k-2)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3k & k+2 & k+2 \\ 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{(k-1)(k-2)} = \frac{3k^3 + k^2 - 8k + 4}{(k-1)(k-2)} = \frac{(k-1)(3k^2 + 4k - 4)}{(k-1)(k-2)} = \frac{(3k^2 + 4k - 4)}{(k-2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3k & 3 & k+2 \\ 1 & 2 & k+1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{(k-1)(k-2)} = \frac{-3k^3 - 2k^2 + 9k - 4}{(k-1)(k-2)} = \frac{(k-1)(-3k^2 - 5k + 4)}{(k-1)(k-2)} = \frac{-3k^2 - 5k + 4}{(k-2)}$$

Esaminiamo cosa succede per $k = 1$.

Si ha

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e risulta $\text{Det}(A) = 0$, ma esiste il minore

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

e pertanto $r(A) = 2$; consideriamo il determinante della matrice completa

$$\text{Det}(A') = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Essendo la 4° riga eguale alla 3° riga, $r(A') < 3$, esistendo poi il minore $M \neq 0$, $r(A') = 2$ e quindi $r(A) = r(A') = 2 \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Scriviamo il sistema ponendo $k = 1$

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni si ottengono considerando le prime due equazioni di esso

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

e, posto $z = t$, avendo scelto il minore M , si ottiene

$$\begin{cases} 3x + 3y = 3 - 3t \\ x + 2y = 2 - 2t \end{cases}$$

Risolvendo con le formule di Cramer si ha

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3t & 3 \\ 2-2t & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2(3-3t) - 3(2-2t)}{3} = 0$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3-3t \\ 1 & 2-2t \end{vmatrix}}{3} = \frac{6-6t-3+3t}{3} = \frac{3(1-t)}{3} = 1-t$$

Quindi per $k = 1$ le soluzioni sono $(0, 1-t, t)$ con t reale.

Esaminiamo il caso $k = 2$

Si ha

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

e risulta $\text{Det}(A) = 0$, ma esiste il minore

$$M = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

E pertanto $r(A) = 2$.

La matrice completa ha, ponendo nel sistema di partenza $k = 2$,

$$\text{Det}(A') = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ha il minore orlato

$$M' = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

da cui $r(A') = 3$ e quindi $r(A) \neq r(A') \Rightarrow$ il sistema, per il teorema di Rouché-Capelli, non è compatibile.

3. Deve risultare, considerate (x, y, z) e (x', y', z') di $\mathbb{R}^3$

$$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

e

$$f(\alpha(x, y, z)) = \alpha f(x, y, z) \quad \text{con } \alpha \text{ numero reale}$$

Si ha

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f((x+x', y+y', z+z')) = \\ &= (x+x' + y+y' +1, z+z') \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) + f((x', y', z')) &= (x + y + 1, z) + (x' + y' + 1, z') = \\ &= (x + x' + y + y' + 2, z + z'). \end{aligned}$$

Pertanto, essendo $f((x, y, z) + (x', y', z')) \neq f(x, y, z) + f(x', y', z')$,
l'applicazione non è lineare.