

UNIVERSITA' DEGLI STUDI "LA SAPIENZA" DI ROMA
POLO DI RIETI
FACOLTA' DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'AMBIENTE
E DEL TERRITORIO

Geometria
19 – 10 – 2005
A.A. 2005 – 2006

Cognome_____	Nome_____
Matricola_____	Codice_____
Scrivere in stampatello	

1. Verificare se, al variare del parametro reale k , i vettori
 $\mathbf{u}(2, k, 1) \quad \mathbf{v}(-1, 1, 0) \quad \mathbf{z}(1, 1, k)$
sono L.I. o L.D. (punti 2)
2. Determinare l'insieme dei vettori ortogonali ai vettori
 $\mathbf{u}(-1, 1, 0) \quad \mathbf{v}(2, 0, 1) \quad \mathbf{z}(1, 1, 1)$ (punti 3)
3. Dati i vettori $\mathbf{u}(1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}(0, 1, 1)$
 - ☐ calcolare il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
 - ☐ verificare che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. (punti 2+2)
4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & h \end{pmatrix}$$

Discutere, al variare del parametro reale h , l'esistenza della matrice inversa e calcolarla, quando possibile. (punti 5)

5. Enunciare il teorema di Kronecker e determinare per mezzo di esso il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{punti 4})$$

6. Discutere al variare del parametro reale k il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix} \quad (\text{punti } 5)$$

7. Date le seguenti matrici stabilire se sono *conformabili* e, in caso affermativo calcolare $C = AB$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{punti } 4)$$

Quesiti

1. Dati 4 vettori distinti di $\mathbb{R}^3$ stabilire quali delle seguenti affermazioni sono **vere** e quali **false**:

- a. sono sempre linearmente dipendenti
- b. 3 vettori dei quattro sono linearmente indipendenti
- c. almeno uno è linearmente indipendente
- d. almeno uno dipende linearmente dagli altri

Motivare la risposta. (punti 1)

2. Cosa significa se il prodotto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è nullo? (punti 1)

3. Mettere in relazione, se è possibile, il rango di una matrice e la dipendenza o indipendenza lineare dei vettori. (punti 1)

SOLUZIONI

1. Consideriamo l'equazione

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

che nel caso specifico è

$$a(2, k, 1) + b(-1, 1, 0) + c(1, 1, k) = (0, 0, 0)$$

ed essa equivale al sistema:

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ ka + b + c = 0 \\ a + kc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + c \\ ka + 2a + c + c = 0 \\ a + kc = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + c \\ (k+2)a + 2c = 0 \\ a = -kc \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = 2a + c \\ -k^2c - 2kc + 2c = 0 \\ a = -kc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + c \\ (k^2 - 2k + 2)c = 0 \\ a = -kc \end{cases}$$

$$\text{da cui } k^2 - 2k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Pertanto

per $k = -1 \pm \sqrt{3}$ sistema indeterminato $\Rightarrow$ infinite soluzioni $\Rightarrow$ vettori L. I.

per $k \neq -1 \pm \sqrt{3}$ il sistema ammette la sola soluzione banale $(0, 0, 0) \Rightarrow$ vettori L. D.

2. Deve risultare, considerato il generico vettore $\mathbf{t}(x, y, z)$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{z} = 0$$

cioè

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (2, 0, 1) = 0 \Rightarrow 2x - z = 0$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{z} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Le condizioni precedenti equivalgono al sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \\ y + y - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{soddisfatto } \forall x \in \mathcal{R}$$

Pertanto ogni vettore del tipo $\mathbf{t}(x, x, -2x)$ è ortogonale ai vettori dati.

3. Calcoliamo le componenti del vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. esse sono date dai minori del 2° ordine della matrice costituita dalle componenti di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenute cancellando rispettivamente la prima, la seconda, la terza colonna e presi con i segni alternati.

Quindi

$$w_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad w_y = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad w_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e pertanto

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} (-1, -1, 1)$$

- Per essere i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ una base di $\mathfrak{R}^3$ essi devono essere L. I. cioè l'equazione
 $a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(-1, -1, 1) = (0, 0, 0)$
 deve essere verificata dalla sola soluzione banale.

Traducendo in sistema si ha

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a \\ 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Quindi ammettendo il sistema la sola soluzione nulla $(0, 0, 0)$ i vettori sono L. I. e costituiscono una base di $\mathfrak{R}^3$.

4. Per l'esistenza della matrice inversa deve essere $\text{Det}(A) \neq 0$. Pertanto

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = h - 4 + 0 - (0 + 8 - 3) = h - 9$$

$$\text{Det}(A) = h - 9 \neq 0 \Rightarrow h \neq 9.$$

Calcoliamo A^{-1} per $h \neq 9$.

La matrice inversa è data da $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} (A^*)^T$ con $(A^*)^T$ matrice trasposta dei complementi algebrici.

Calcoliamo i complementi algebrici di A

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = h - 8; \quad c_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & h \end{vmatrix} = 2; \quad c_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad c_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & h \end{vmatrix} = -2h + 12;$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & h \end{vmatrix} = h - 3; \quad c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6; \quad c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Pertanto

$$A^* = \begin{pmatrix} h-8 & 2 & 1 \\ -2h+12 & h+3 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} h-8 & -2h+12 & 1 \\ 2 & h+3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

dove la matrice trasposta si ottiene scambiando le righe con le colonne di A^* .

In definitiva quindi la matrice inversa di A è:

$$A^{-1} = \frac{1}{h-9} \begin{pmatrix} h-8 & -2h+12 & 1 \\ 2 & h+3 & -2 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Il teorema di Kronecker afferma che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il rango di una matrice $A(m, n)$ sia $p \leq \min\{m, n\}$ è che siano nulli tutti i minori orlati di un minore di A di ordine p diverso da zero.

Pertanto consideriamo il minore di A di ordine 2

$$M = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 2 = 12 \neq 0$$

Il rango di A è $0 \leq r(A) \leq 3$.

Calcoliamo gli orlati di M di ordine 3:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 11 & 4 & -7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -70 - 33 - 8 - (14 + 60 + 22) = -95 - 96 = -191 \neq 0$$

poiché M_1 è diverso da zero il rango di A è 3.

6. Calcoliamo il determinante della matrice data

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3k^2 - 3k - 3k - (-3k - 3k^3 - 3) = \\ &= -3k^2 - 6k + 3k + 3k^3 + 3 = 3k^3 - 3k - 3k^2 + 3 = 3(k^3 - k^2 - k + 1) = \\ &= 3[k^2(k-1) - (k-1)] = 3(k-1)^2(k+1) \end{aligned}$$

$$\text{Det}(A) = 0 \Rightarrow k = \pm 1.$$

Il rango di A è $0 \leq r(A) \leq 3$.

Quindi

per $k \neq \pm 1$ $\text{Det}(A) \neq 0$ e $r(A) = 3$;

per $k = -1$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 3 - (+3 + 3 - 3) = 0$$

Pertanto $0 \leq r(A) \leq 2$, poiché il minore

$$M = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = +3 + 3 = 6$$

è diverso da 0 $r(A) = 2$;

per $k = 1$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

essendo seconda e terza riga proporzionali alla prima, quindi non esiste alcun minore del secondo ordine diverso da zero e quindi $r(A) = 1$.

8. Due matrici $A(m, n)$ e $B(h, k)$ sono conformabili o moltiplicabili se e solo se $m = k$ oppure $n = h$.

Nel caso specifico $A(3, 4)$ e $B(4, 2)$ pertanto le due matrici sono conformabili essendo il numero delle colonne di A eguale al numero delle righe di B e la matrice prodotto AB è del tipo $(3, 2)$.

Calcoliamola, ricordando che gli elementi della matrice prodotto si ottengono sommando i prodotti degli elementi di stesso posto di righe e colonne con lo stesso numero di elementi

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 4 + 1 & 0 + 2 + 6 - 1 \\ 2 + 3 + 2 + 1 & 0 - 6 + 3 - 1 \\ 4 + 1 - 2 + 2 & 0 - 2 - 3 - 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

QUESITI

1. a) vero; b) falso; c) vero; d) vero.

2. Il modulo di un prodotto vettoriale è $\text{mod}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = u v \sin \alpha$ con α angolo formato da due qualsiasi segmenti rappresentanti dei vettori dati; pertanto se il prodotto vettoriale è nullo e i due vettori sono diversi da 0, allora deve essere $\sin \alpha = 0$ e quindi l'angolo formato da essi è di 0° , cioè i due vettori sono paralleli.

3. Per definizione si dice *rango* di una matrice $A(m, n)$ la dimensione dello spazio delle righe (colonne) di A ; poiché la dimensione dello spazio eguaglia il numero di vettori L. I. che generano lo spazio

il rango di una matrice A è eguale al massimo numero di vettori riga o di vettori colonna L.I.