

La retta nel piano

Equazioni vettoriali e parametriche di una retta

Supponiamo che la retta r sia assegnata attraverso un suo punto $P_0(x_0, y_0)$ e un vettore $\mathbf{v}(l, m)$ che ne indichi la direzione.

Condizione necessaria e sufficiente perché un punto $P(x, y)$ appartenga alla retta r è che il vettore $\mathbf{PP}_0$ e il vettore $\mathbf{v}$ siano paralleli, cioè che sia

$$\mathbf{PP}_0 = t \mathbf{v} \quad \text{con } t \in \mathcal{R} \quad (1)$$

Al variare di t in $\mathcal{R}$, la (1) dà tutti e soli i punti di r e la (1) si dice **equazione vettoriale di r** .

Fissato nel piano un riferimento cartesiano di origine O ed una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, posto $P_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{v} = l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$ e $P(x, y)$, passando alle relazioni scalari la (1) diventa:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (2)$$

che si dicono **equazioni parametriche della retta r** .

Le (2) al variare di t in $\mathcal{R}$ forniscono tutti e soli i punti di r .

Il vettore $\mathbf{v}$ dicesi **vettore direttore** e le sue componenti l, m si dicono **parametri direttori** della retta r .

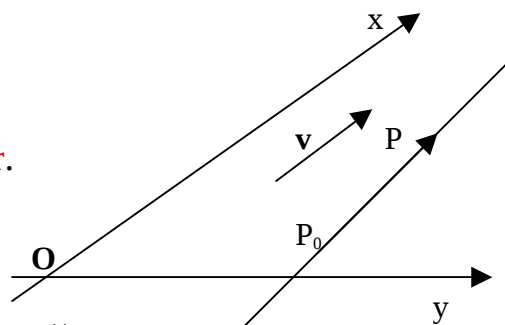


Fig.1

E' bene osservare che l'equazione della retta r non varia se si considera un qualsiasi altro punto $P_1(x_1, y_1)$ di r , oppure si sostituisce al vettore $\mathbf{v} = l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$ un qualsiasi altro vettore non nullo e parallelo a $\mathbf{v}$, cioè un $k\mathbf{v}$ con $k \neq 0$ per quanto detto ora, le equazioni (2) diventano

$$\begin{cases} x = x_1 + k lt \\ y = y_1 + k mt \end{cases} \quad (3)$$

e rappresentano ancora la retta r .

Quindi per ogni retta r infinite sono le sue rappresentazioni parametriche.

Relativamente ai parametri direttori l, m di r si osservi quanto segue:

- essi non possono essere contemporaneamente nulli;
- se $l = 0$ si ha una retta parallela all'asse y , se $m = 0$ la retta è parallela all'asse x ;

- l, m sono definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità e ciò è evidente se si ricorda che vettori paralleli hanno componenti proporzionali.

Se la retta r è individuata da due suoi punti qualsiasi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, allora si può considerare come vettore direttore $\mathbf{v}$ il vettore $\mathbf{P_1P_2}$ e pertanto la (1) diventa

$$\mathbf{PP_1} = t(\mathbf{P_1P_2}) \quad (4)$$

e cioè, passando alle coordinate:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (5)$$

Da queste eliminando il parametro t si ottiene

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5a)$$

Equazione cartesiana di una retta

Si vuole ora caratterizzare una retta r attraverso un'equazione cartesiana, cioè esplicitando una relazione diretta tra le variabili x e y , verificata da tutti e soli i punti della retta r .

Abbiamo detto che una retta è individuata univocamente se sono fissati un suo punto e una direzione ad essa parallela.

Dalla geometria euclidea si sa che, nel piano, esiste ed è unica la retta ortogonale ad una retta data.

Pertanto, dato il vettore $\mathbf{v}$ esisterà un vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ che individua univocamente la direzione ad esso ortogonale a $\mathbf{v}$ e a tutti i vettori ad esso paralleli.

Quindi considerato $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e fissato il punto $P_0(x_0, y_0)$, il generico punto $P(x, y)$

apparterrà alla retta per P_0 e ortogonale a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ se e solo se $\mathbf{P_0P}$ e $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sono ortogonali; usando il prodotto scalare e ricordando che due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, si ha:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (6)$$

che si può scrivere come

$$ax + by + c = 0 \quad (7)$$

avendo posto $c = -a x_0 - b y_0$.

La (7) si dice **equazione cartesiana** della retta r .

Sussiste il seguente **teorema**

Ogni retta del piano si rappresenta mediante un'equazione algebrica lineare in due variabili della forma

$$ax + by + c = 0$$

Dimostrazione

La prima parte è stata già sostanzialmente dimostrata partendo dalle equazioni parametriche (2).

Viceversa data un'equazione del tipo (7) e fissate arbitrariamente due soluzioni distinte (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di essa, si giunge alla tesi facendo vedere che la retta per $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ è rappresentata proprio da un'equazione del tipo della (7).

Nota

Nelle (2) eliminando il parametro t si giunge ad un'equazione del tipo:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Leftrightarrow -m(x - x_0) + l(y - y_0) = 0$$

equivalente alla (6), avendo posto $a = -m$ e $b = l$.

Da ciò, pertanto, risulta evidente che

I parametri direttori l, m di una retta scritta in forma cartesiana sono proporzionali ai coefficienti della x e della y scambiati di posto e uno di segno.

Condizione di allineamento di tre punti

In un riferimento cartesiano siano dati i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e sia r la retta passante per essi.

Un generico punto $P(x, y)$ appartiene ad r se e solo se i vettori $\mathbf{PP}_1$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ sono paralleli, cioè se essi sono linearmente dipendenti

Dette quindi $(x - x_1, y - y_1)$ e $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ le coordinate di $\mathbf{PP}_1$ e $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ deve essere:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

questa condizione può anche scriversi come

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Infatti se nel determinante a primo membro della (9) si sottrae la seconda riga dalla prima e dalla terza si ha:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppato secondo gli elementi della terza colonna, dà

$$1 \cdot \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè proprio la (8).

Concludendo:

condizione necessaria e sufficiente perché tre punti siano allineati e che sia verificata la (9).

Osservazione

All'equazione cartesiana di una retta si può giungere anche dal determinante della (9); infatti sviluppando secondo gli elementi della prima riga si ottiene

$$(y_1 - y_2)x + (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

in cui basta porre $y_1 - y_2 = a$ $x_1 - x_2 = b$ $x_1y_2 - x_2y_1 = c$.

Fasci di rette. Posizioni fra due rette.

L'insieme costituito da più rette si dice **fascio di rette**.

Dalla geometria euclidea è noto che dato un punto P infinite sono le rette passanti per P. In questo caso l'insieme di tutte le rette per P dicesi **fascio proprio** e il punto P si chiama **centro** (o **sostegno**) del fascio.

Vale il seguente **teorema**:

Dato un qualsiasi punto $P_0(x_0, y_0)$ siano

$$r) \quad ax + by + c = 0$$

$$s) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

due rette non parallele passanti per P_0 ; tutte e sole le rette del fascio proprio di centro P_0 hanno equazioni del tipo:

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \quad (10)$$

con λ e μ numeri reali qualsiasi, purché non entrambi nulli.

Dimostrazione

La (10), per λ e μ qualsiasi e non nulli, rappresenta una retta per P_0 .

Infatti essa può scriversi nella forma

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c') = 0$$

Inoltre, poichè r e s non sono parallele, i vettori $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ e $a'\mathbf{u}_1 + b'\mathbf{u}_2$ non sono paralleli, quindi

$$(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0, 0)$$

cioè i coefficienti di x ed y non sono entrambi nulli.

Poiché $P_0 \in s$ le sue coordinate soddisfano l'equazione di s , cioè:

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

quindi $\forall \lambda$ e $\mu \in \mathbb{R}$ la (10) si annulla in P_0 , cioè P_0 soddisfa la (10).

Viceversa ogni retta che passa per P_0 appartiene all'insieme delle rette rappresentato dalla (10) per opportuni λ e μ .

Infatti sia $P_1(x_1, y_1)$ un generico punto diverso da P_0 ; la retta per P_1 e P_0 ha equazione

$$(a'x_1 + b'y_1 + c')(ax + by + c) + (ax_1 + by_1 + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

che, posto $\lambda_0 = -(a'x_1 + b'y_1 + c')$ e $\mu_0 = (ax_1 + by_1 + c)$, può scriversi come

$$\lambda_0(ax + by + c) + \mu_0(a'x + b'y + c') = 0$$

ed essa è ancora un'equazione del tipo rappresentato dalla (10) e pertanto appartiene al fascio di centro P_0 .

Allora un fascio di rette proprio si ottiene come combinazione lineare di due qualsiasi rette passanti per il centro del fascio ed è rappresentato da un'equazione (10).

Dato il punto $P_0(x_0, y_0)$ e il generico vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ l'equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (11)$$

rappresenta al variare di $\mathbf{v}$, cioè di a e di b , tutte le rette del fascio proprio di centro P_0 .

Osservazione

Poiché l'equazione di una retta dipende da due parametri si può concludere che
le rette del piano sono ∞^2 .

Si dice **fascio di rette improprio** l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

Le rette appartenenti ad un fascio improprio riempiono una classe di equivalenza rispetto alla relazione “essere parallele”¹.

Sono dunque rette che godono tutte di una stessa proprietà rappresentata dall'avere “stessa direzione”.

Data una retta r di equazione

$$ax + by + c = 0$$

¹ La relazione “essere parallele” gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e pertanto è una relazione di equivalenza, le cui classi di equivalenza sono costituite dalle rette parallele ad una retta data.

I suoi parametri direttori sono $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, quindi se si tengono fissi a e b e si fa variare

c , si ottengono tutte le rette parallele ad r , cioè:

$$ax + by + h = 0 \quad h \in \mathcal{R} \quad (12)$$

rappresenta l'equazione di un fascio di rette improprio.

Consideriamo ora le rette r, s, q di equazioni

$$r) \quad ax + by + c = 0$$

$$s) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

$$q) \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

in generale la retta q non appartiene al fascio determinato da r e s , vogliamo quindi cercare una condizione perché r, s e q appartengano ad uno stesso fascio di rette.

Sussiste la seguente:

condizione necessaria e sufficiente perché tre rette appartengano ad uno stesso fascio è che sia nullo il determinante formato dai coefficienti e i termini noti delle loro equazioni, cioè

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Dimostrazione

$\Rightarrow$

Supponiamo che le tre rette appartengano allo stesso fascio. Allora se due di esse, ad esempio r e s , sono distinte, la terza deve essere combinazione lineare delle altre due, cioè deve essere

$$a'' = \lambda a + \mu a'; \quad b'' = \lambda b + \mu b'; \quad c'' = \lambda c + \mu c'$$

e quindi la (13) è verificata, essendo la terza riga combinazione lineare delle prime due.

Se poi due delle tre rette coincidono allora le tre rette “a fortiori” appartengono allo stesso fascio e la (13) è ancora verificata avendo due righe proporzionali.

$\Leftarrow$

Viceversa, se il determinante della (13) è nullo², vuol dire che una riga è combinazione lineare delle altre due e quindi le tre rette formano fascio.

² Condizione necessaria e sufficiente affinché un determinante sia nullo è che una riga (colonna) sia combinazione lineare di altre righe (colonne).

Intersezione e parallelismo fra rette

Due rette qualsiasi del piano possono essere **coincidenti**, **parallele** o **incidenti**.

Siano

$$r) \quad ax + by + c = 0$$

$$s) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

se

- si verifica che $a' = \rho a$; $b' = \rho b$; $c' = \rho c$; allora la s risulta combinazione lineare della r e pertanto le due rette sono **coincidenti**;
- se si verificano solo le prime due condizioni, cioè $a' = \rho a$; $b' = \rho b$, ($c' \neq \rho c$), allora le due rette, avendo gli stessi parametri direttori, sono **parallele**;
- se non sono verificate le precedenti condizioni, cioè se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0 \quad (14)$$

allora le due rette sono distinte e non parallele, pertanto hanno un punto in comune e sono **incidenti**.

Da ciò si evince che:

condizione necessaria e sufficiente perché due rette assegnate siano incidenti è che sia verificata la (14).

Per determinare il punto comune alle due rette, quando esse sono incidenti, poiché esso deve soddisfare simultaneamente le equazioni di r e di s, basterà risolvere il sistema costituito dalle due rette.

Vale il seguente **teorema**:

due rette r ed s di equazioni

$$r) \quad ax + by + c = 0$$

$$s) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

sono incidenti se e solo se il rango della matrice costituito dai coefficienti delle variabili x e y è eguale a 2, sono parallele (o coincidenti) se e solo se il suddetto rango è eguale ad 1.

Dimostrazione

⇒

Se le rette r ed s sono incidenti, allora le coordinate del punto comune devono soddisfare contemporaneamente le equazioni di r ed s, cioè devono essere soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

e il suo determinante

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b$$

Se risulta $\text{Det } A \neq 0$ allora $r(A) = 2$ e il sistema ammette una e una sola soluzione³ e le rette sono incidenti.

Se invece $\text{Det } A = 0$ allora $r(A) = 1$; per il teorema di Rouchè-Capelli⁴ consideriamo la matrice completa A'

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

se risulta $r(A') = 2$ allora il sistema non ammette soluzioni e le rette sono parallele e distinte.

Se $r(A') = 1$ allora $a' = \lambda a$ $b' = \lambda b$ e $c' = \lambda c$ con $\lambda \neq 0$, le due equazioni sono equivalenti e le due rette coincidono.

⇐

Viceversa se le due rette sono parallele e distinte il sistema costituito dalle loro equazioni non ammette soluzioni e quindi $r(A) = 1$ e $r(A') = 2$.

Se le rette sono parallele e coincidenti il sistema (*) ammette infinite soluzioni e per il teorema di Rouchè-Capelli $r(A) = r(A') = 1$.

Infine se le rette sono distinte e non parallele risulta $r(A) = 2$.

OSSERVAZIONI

Per le rette parallele valgono le seguenti considerazioni:

- le equazioni di due rette parallele differiscono per il termine noto;
- due o più rette sono parallele se e solo se hanno parametri direttori proporzionali;
- le rette per i punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + t l \\ y = y_0 + t m \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + t' l' \\ y = y_1 + t' m' \end{cases}$$

sono parallele se e solo se i vettori $l \mathbf{u}_1 + m \mathbf{u}_2$ e $l' \mathbf{u}_1 + m' \mathbf{u}_2$ sono paralleli, cioè se e solo se $l m' - l' m = 0$;

- una retta per l'origine ha equazione

$$ax + by = 0$$

³ In questo caso le rette non sono una combinazione lineare dell'altra.

⁴ Teorema di Rouchè-Capelli:

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di m equazioni in n incognite ammetta soluzioni è che la matrice incompleta e quella completa abbiano lo stesso rango.

Vale poi il seguente **teorema**

Date due rette r ed s di equazioni

$$r) \quad ax + by + c = 0$$

$$s) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

risulta

$$r \perp s \Rightarrow a a' + b b' = 0 \quad (15)$$

Dimostrazione

Siano per ipotesi r ed s perpendicolari e siano r_0 ed s_0 due rette per l'origine parallele alle rette date; esse hanno equazioni:

$$r_0) \quad ax + by = 0$$

$$s_0) \quad a'x + b'y = 0$$

considerati i punti $R(b, -a)$ e $S(b', -a')$, diversi da $O(0,0)$, essi appartengono a r_0 e ad s_0 e pertanto risulta che essendo $r \perp s$ allora

$$r_0 \perp s_0 \Leftrightarrow \mathbf{OR} \perp \mathbf{OS}$$

Ricordando che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, cioè se $a a' + b b' = 0$ la tesi resta dimostrata.

OSSERVAZIONI

□ La retta r) di equazione cartesiana

$$ax + by + c = 0$$

e la retta s) per $P_0(x_0, y_0)$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + t l \\ y = y_0 + t m \end{cases}$$

sono ortogonali se e solo se i vettori $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ e $l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$ sono paralleli; ciò equivale alla condizione

$$am - bl = 0$$

□ le rette per i punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + t l \\ y = y_0 + t m \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + t' l' \\ y = y_1 + t' m' \end{cases}$$

sono ortogonali se e solo se i vettori $l\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2$ e $l'\mathbf{u}_1 + m'\mathbf{u}_2$ sono ortogonali, cioè se e solo se $l l' + m m' = 0$.

ESERCIZI SVOLTI

1. Scrivere l'equazione della retta passante per A(1, 2) e perpendicolare a $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Soluzione

Ricordando che due rette sono perpendicolari se e solo se due vettori ad esse paralleli hanno prodotto scalare nullo, deve risultare, considerato un generico punto P(x, y)

$$\mathbf{AP} \perp \mathbf{v}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 3u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ottiene

$$3(x-1) - (y-2) = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

che è l'equazione della retta richiesta.

2. Scrivere l'equazione della retta passante per A(1, 2) e parallela al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

Soluzione

I parametri direttori della retta richiesta sono $l = 1$ e $m = 3$, da cui le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Volendo scrivere l'equazione cartesiana della retta trovata basta ricordare che $a = m$ e $b = -l$ e applicare le (6)

$$3(x-1) - (y-2) = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

oppure la stessa equazione si può ottenere eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche trovate:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3(x-1) - (y-2) = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

3. Scrivere l'equazione cartesiana e quelle parametriche della retta passante per A(5, -3) e B(2, -1)

Soluzione

L'equazione della retta richiesta si può ottenere in più modi:

- a. imponendo che i punti A(5, -3) e B(2, -1) e il generico punto P(x, y) siano allineati, cioè secondo le (9)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-3 + 1) - y(5 - 2) + (-5 + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$-2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0$$

da cui, ricordando che i parametri direttori della retta richiesta sono dati da

$$a = m \quad b = -l$$

le equazioni parametriche sono, introducendo il parametro t

$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- b. ricordando le (4), deve risultare

$$\mathbf{AP} = t\mathbf{AB}$$

cioè, equivalentemente

$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

4. Determinare il valore del parametro reale k in modo che il punto P(2, k) risulti allineato con i punti A(3, -1) e B(0, 2)

Soluzione

Per essere i punti A, B, P allineati deve essere:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3k = 0 \Rightarrow k = 0$$

5. Determinare l'equazione cartesiana e quelle parametriche della retta passante per $A(1, 2)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

Soluzione

Detto $P(x, y)$ un generico punto della retta da determinare, deve risultare

$$\mathbf{AP} = t\mathbf{v}$$

e, traducendo scalarmente, si ottiene

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

per ottenere l'equazione cartesiana basta ricordare che per essere la retta per A e per P parallela al vettore $\mathbf{v}$ i vettori $\mathbf{AP}$ e $\mathbf{v}$ devono essere linearmente dipendenti, cioè

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ -1 & +3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1) + (y-2) = 0 \Rightarrow \\ 3x + y - 5 = 0$$

6. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della retta passante per $A(-2, 1)$ e $B(3, -5)$ e per $P(5, -1)$ e $Q(5, 7)$.

Soluzione

Considerato un generico punto $P(x, y)$ si può imporre che i tre punti P, A e B siano allineati, cioè dalle (9)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppato dà

$$6x + 5y + 7 = 0$$

Alla stessa equazione si perviene se si applica la (5a)

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-1}{-5-1} \Rightarrow -6(x+2) = 5(y-1) \Rightarrow 6x + 5y + 7 = 0$$

Inoltre per ottenere le equazioni parametriche della stessa retta basta applicare le (5)

$$\begin{cases} x = -2 + t(3 + 2) \\ y = 1 + t(-5 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 6t \end{cases}$$

per quanto riguarda poi la retta per i punti P e Q basta osservare che i due punti hanno la stessa ascissa e pertanto appartengono ad una retta parallela all'asse delle y, cioè

$$x = 5$$

Alla stessa equazione poi si perviene applicando uno dei metodi noti.

7. Decomporre il vettore $\mathbf{v}$ di componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ in due vettori paralleli rispettivamente alle rette r) $x - 3y + 1 = 0$ ed s) $x = t, y = 1 - t$

Soluzione

Consideriamo il vettore, di componenti i parametri direttori di r, $\mathbf{v}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il vettore, di componenti i parametri direttori di s, $\mathbf{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, essi sono paralleli alle rette r ed s; pertanto basterà decomporre il vettore $\mathbf{v}$ in due vettori paralleli a $\mathbf{v}_1$ e a $\mathbf{v}_2$, o, ciò che è lo stesso, esprimere $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè in termini vettoriali

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 \quad (1)$$

traducendo scalarmene si ottiene

$$\begin{cases} 1 = 3\lambda + \mu \\ -3 = \lambda - \mu \end{cases}$$

che risolto dà $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\mu = \frac{5}{2}$.

Allora i due vettori richiesti sono dalla (1) sono $-\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$ e $\frac{5}{2}\mathbf{v}_2$ e le loro componenti sono:

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

8. Nel fascio determinato dalle rette

$$\text{r) } x + 2y + 1 = 0$$

$$\text{s) } 2x - y - 1 = 0$$

determinare

- l'equazione della retta che ha coefficiente angolare -1
- l'equazione della retta parallela al vettore $\mathbf{v}(-3, 1)$

Soluzione

- La generica retta del fascio è combinazione lineare della r) e della s) e quindi ha equazione

$$\begin{aligned} \lambda(x + 2y + 1) + \mu(2x - y - 1) &= 0 \Rightarrow \\ (\lambda + 2\mu)x + (2\lambda - \mu)y + \lambda - \mu &= 0 \end{aligned}$$

Deve essere

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu - 2\lambda} = -1 \Rightarrow \lambda + 2\mu = 2\lambda - \mu \Rightarrow \lambda = 3\mu$$

scelto $\lambda = 3$ e $\mu = 1$ la retta richiesta ha equazione

$$3(x + 2y + 1) + (2x - y - 1) = 0 \Rightarrow \\ 5x + 5y + 2 = 0$$

- Una retta del fascio per essere parallela al vettore dato deve avere parametri direttori proporzionali, cioè deve risultare

$$\frac{\lambda + 2\mu}{-3} = \frac{2\lambda - \mu}{1} \Rightarrow \lambda + 2\mu = -3(2\lambda - \mu) \Rightarrow 5\lambda = 5\mu \Rightarrow$$

$$\lambda = \mu$$

scelti quindi $\lambda = \mu = 1$ la retta richiesta ha equazione

$$3x - y = 0.$$