

TEORIA DEGLI INSIEMI

GENERALITA'

Un *insieme* è un ente costituito da *oggetti*.

Il concetto di *insieme* e di *oggetto* si assumono come primitivi.

Se un oggetto a fa parte di un insieme A si dice che esso è un suo *elemento* o che *appartiene* ad A ; in simboli

$$a \in A$$

Un insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto* e si denota con $\square$.

ESEMPIO

Un esempio di insieme vuoto è l'insieme dei numeri reali di quadrato -4 .

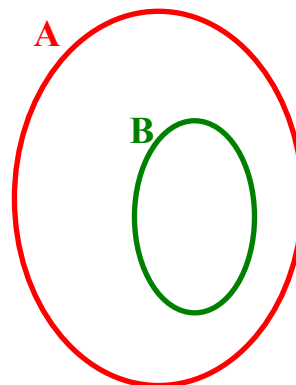
Un insieme A si dice *finito* se ha un numero finito di elementi; si dice *ordine* dell'insieme il numero dei suoi elementi.

Un insieme che non è *finito* si dice *infinito*.

Siano A, B due insiemi.

Se ogni elemento di B appartiene anche ad A si dice che B è *incluso* in A o che B è *sottoinsieme* di A e si indica

$$B \subseteq A$$



Se ogni elemento di A appartiene a B e ogni elemento di B appartiene ad A allora A è *uguale* a B ; in simboli

$$A = B$$

Se $B \subseteq A$ e $A \not\subseteq B$, allora vuol dire che *esiste almeno un elemento di A che non appartiene ad B* , pertanto si dice che B è *incluso propriamente* in A e si indica

$$B \subset A$$

L'insieme dei sottoinsiemi di un insieme A si dice *insieme delle parti* di A; fanno parte di esso A e l'insieme vuoto $\square$.

ESEMPIO

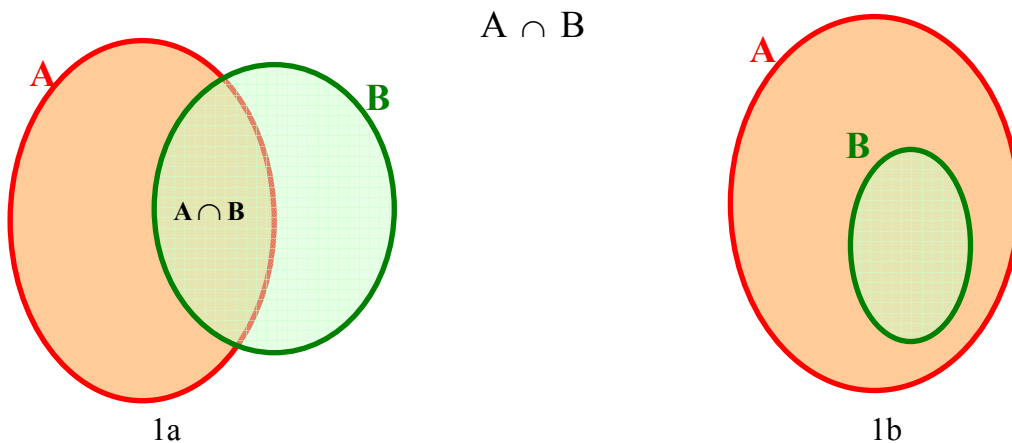
Sia $A = \{0, 1, 2, 3\}$. I sottoinsiemi di A sono: $A; \square; \{ \} \{0\} \{1\} \{2\} \{3\} \{0, 1\} \{0, 2\} \{0, 3\} \{1, 2\} \{1, 3\} \{2, 3\} \{0, 1, 2\} \{0, 1, 3\} \{0, 2, 3\} \{1, 2, 3\}$.

L'insieme delle *parti di A* è l'insieme che ha per elementi i sottoinsiemi di A

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

Siano A, B due insiemi.

Dicesi *intersezione* di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B (fig.1a, 1b); in simboli



Se $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$ (fig. 1b).

Se A e B **non** hanno elementi comuni allora $A \cap B = \square$; essi si dicono *disgiunti* e la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Siano A e B due insiemi.

Dicesi **unione** di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono o ad A o a B; in simboli

$$A \cup B$$

Se $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$

ESEMPI

Siano P l'insieme dei numeri naturali pari e D l'insieme dei numeri naturali dispari. Risulta

$$P \cap D = \emptyset$$

e

$$P \cup D = \mathbb{N}$$

Sia A l'insieme dei giorni della settimana e $B = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì}\}$. Risulta

$$A \cap B = B \quad \text{e} \quad A \cup B = A$$

perché $B \subseteq A$.

Siano A e B due insiemi.

Si dice **differenza** tra gli insiemi A e B l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B; in simboli

$$A - B$$

Se $B \subseteq A$, $A - B$ si dice **complementare** di B rispetto ad A.

ESEMPI

Sia $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Risulta

$$A \cap B = \{1, 3\} \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$A - B = \{0, 2, 4\} \quad B - A = \{5, 7, 9\}$$

Siano A, B e C tre insiemi.

Per le operazioni appena definite valgono le seguenti *proprietà*:

Intersezione		Unione	
Idempotenza	$A \cap A = A$	Idempotenza	$A \cup A = A$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	Commutativa	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
$A - B \subseteq A$			
$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$			
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$			

Valgono inoltre le **leggi di De Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Dati due insiemi **A** e **B** non vuoti si definisce **prodotto cartesiano** di **A** e **B**, in simboli $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate (a,b) in cui $a \in A, b \in B$

$$A \times B = \left\{ (a, b) : a \in A; b \in B \right\}$$

All'insieme $A \times B$ appartengono quindi *tutte* le possibili coppie in cui il primo elemento è *sempre* nel primo insieme e il secondo nel secondo insieme.

E' importante ricordare che le coppie del prodotto cartesiano sono coppie *ordinate*, cioè la coppia (a, b) risulta diversa dalla coppia (b, a), cioè $A \times B \neq B \times A$.

Quindi il prodotto cartesiano di $A \times B$ non gode della *proprietà commutativa*.

Se risulta $B = A$, allora si ha il prodotto cartesiano di un insieme per se stesso, in simboli $A \times A$, a volte indicato anche con A^2 .

Inoltre se uno dei due insiemi è l'insieme vuoto, cioè $B = \square$, allora risulta

$$A \times \square = \square \times A = \square$$

e, in particolare

$$\square \times \square = \square \times \square = \square.$$

ESEMPI

Sia $A = \{0, 1\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme
 $A \times B = \{(0, a); (0, b); (0, c); (1, a); (1, b); (1, c)\}$.

Se $A = \{a, b, c\}$ allora risulta

$$A \times A = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}.$$

Per il prodotto cartesiano $A \times B$ valgono le seguenti **proprietà**:

distributiva rispetto all'unione

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

distributiva rispetto all'intersezione

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$\text{Se } C \subseteq A \text{ e } D \subseteq B \Rightarrow C \times D \subseteq A \times B$$

RELAZIONI IN UN INSIEME

Il linguaggio comune, cioè la lingua parlata, è costituito da frasi; esse in genere vengono chiamate **proposizioni**.

1. "Madrid è la capitale della Spagna";
2. "Oggi piove?";
3. "3 è maggiore di 7";
4. "Non ti muovere".

Le precedenti sono tutte proposizioni; anche la matematica fa uso delle proposizioni, ma con un significato più restrittivo rispetto alla lingua parlata.

Infatti, in logica matematica si definisce **proposizione** una frase di cui si può dire se è *vera* o *falsa* senza ambiguità; i concetti di *vero* o *falso* sono assunti come primitivi.

Tra le frasi riportate sopra, come esempi, solo la 1 e la 3 sono proposizioni.
In ogni proposizione si distinguono un *predicato* e gli *argomenti*.

ESEMPI

Nella frase

“Carla è sorella di Giulio”

si distingue il **predicato** “essere sorella di” e gli **argomenti** “Carla” e “Giulio”.

Nella frase

“15 è maggiore di 7”

si distingue il **predicato** “essere maggiore di” e gli **argomenti** “15” e “7”.

Una proposizione riferita a due argomenti viene chiamata **relazione**.

Le relazioni determinano coppie ordinate di elementi (a, b) , di cui il primo appartiene ad un insieme assegnato **A** e il secondo ad un altro insieme, anch'esso assegnato, **B**;

in tal caso si dirà che “ a è in relazione $\mathcal{R}$ con b ”, in simboli

$$a \mathcal{R} b \text{ oppure } \mathcal{R}(a, b) \quad \text{con } a \in A, b \in B$$

Le coppie ordinate che verificano la relazione assegnata $\mathcal{R}$ appartengono ad un insieme che risulta essere sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

ESEMPIO

Sia $A = \{2, 4, 7\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$ e sia $\mathcal{R} = \text{“essere minore di”}$;

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \leq b \quad \text{con } a \in A, b \in B$$

Le coppie che verificano la $\mathcal{R}$ costituiscono l'insieme

$$\{(2, 5); (2, 8); (4, 5); (4, 8); (7, 8)\} \subset A \times B.$$

Da quanto detto in precedenza

dati due insiemi **A** e **B** non vuoti, si definisce **relazione binaria** tra **A** e **B** ogni proprietà che permette di associare elementi di **A** con elementi di **B**.

Una relazione binaria $\mathcal{R}$ può godere delle seguenti **proprietà**:

riflessiva $\Leftrightarrow a \mathcal{R} a \quad \forall a \in A$ cioè se ogni elemento di A è in relazione $\mathcal{R}$ con se stesso

simmetrica $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a \quad \forall a, b \in A$

antisimmetrica $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$
cioè $\forall a, b \in A$ con $a \neq b \quad a \mathcal{R} b \Rightarrow b \text{ non } \mathcal{R} a$

Transitiva $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c \quad \forall a, b, c \in A$

ESEMPIO

Per ognuna delle seguenti **relazioni** analizzarne le proprietà:

1. essere figlio di
2. frequentare la stessa classe
3. essere parallele nell'insieme delle rette del piano
4. essere perpendicolari nell'insieme delle rette del piano

La 1 non è riflessiva, non è simmetrica, non è transitiva; è antisimmetrica.

La 2 è riflessiva, è simmetrica, è transitiva.

La 3 è riflessiva, è simmetrica, è transitiva.

La 4 non è riflessiva, è simmetrica, non è transitiva.

Sia $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e si consideri la relazione così definita in A :

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b = 4$$

Tale relazione

non è riflessiva; infatti non è sempre vero che $a \mathcal{R} a$

(infatti $1 \mathcal{R} 1$ non è vero perché $1 + 1 \neq 4$);

è simmetrica; infatti $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$;

($1 \mathcal{R} 3 \Rightarrow 3 \mathcal{R} 1$ perché se $1+3=4$ allora $3+1=4$);

non è transitiva; infatti $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ non implica $a \mathcal{R} c$.

Una relazione $\mathfrak{R}$ definita in un insieme A si dice **relazione di equivalenza** $\Leftrightarrow \mathfrak{R}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

ESEMPI

L'identità in un qualsiasi insieme A è una **relazione d'equivalenza**.

La congruenza tra figure piane è una **relazione d'equivalenza**.

La relazione “essere parallele” tra le rette del piano è una **relazione d'equivalenza** che individua le possibili *direzioni* nel piano.

Data una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ definita in un insieme A si dice **classe di equivalenza** (modulo $\mathfrak{R}$) il sottoinsieme di A così definito:

$$[a] = \{x \in A / x \mathfrak{R} a\}$$

Tutti gli elementi di una classe di equivalenza sono **equivalenti** fra loro.

Sia A un insieme non vuoto e $\mathfrak{R}$ una relazione d'equivalenza in A ; dette A_i ($i = 1, \dots, n$) le classi di equivalenza risulta:

- $A_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $A_i \subset A \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j = 1, \dots, n$
- $\bigcup_1^n A_i = A.$

In questo caso si dice che i sottoinsiemi A_i ($i = 1, \dots, n$) costituiscono una **partizione** di A (fig. 2).

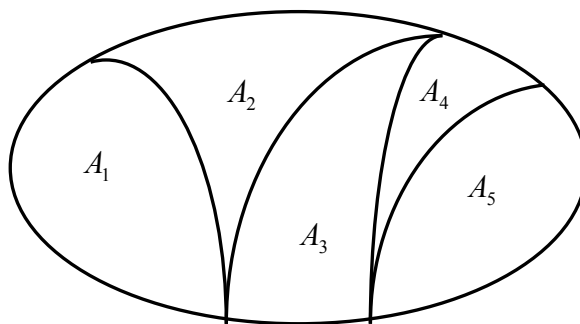


Fig. 2

L'insieme costituito dalle classi di equivalenza di A rispetto ad $\mathcal{R}$ si dice **insieme quoziente** di A rispetto ad $\mathcal{R}$ o modulo $\mathcal{R}$, in simboli:

$$A / \mathcal{R} = \{ A_1, A_2, A_3, \dots \}.$$