

6. APPLICAZIONI o FUNZIONI

Dati due insiemi A e B , sia $R \subseteq A \times B$ una **relazione** di A in B .

Fissato un elemento $x \in A$ può capitare che ad esso la relazione R associ un **solo** elemento di B , o che ne associ **più di uno**, o che **non** ne associ **alcuno**.

*Se ad ogni elemento di A la relazione R associa un solo elemento di B , allora essa prende il nome di **applicazione (funzione)** di A in B .*

Si comprende dunque che le **applicazioni** sono particolari **relazioni**. Anzi possiamo dire che una relazione è un'**applicazione** se accade che:

- 1) *Nessun elemento di A abbia due o più corrispondenti in B ;*
- 2) *Nessun elemento di A sia privo corrispondenti in B*

Dal punto di vista della visualizzazione grafica mediante **frecche** l'essere un'**applicazione** equivale al fatto che

da ogni elemento di A parte una e una sola freccia verso gli elementi di B .

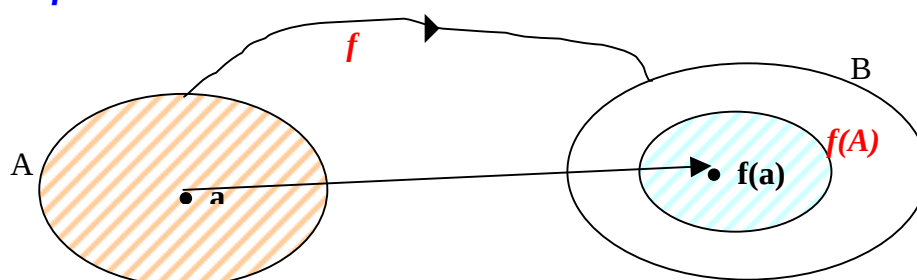
Un'**applicazione** sarà di preferenza indicata con una lettera latina minuscola, ad esempio $f \subseteq A \times B$ (in luogo di R); tuttavia si usano spesso anche le scritture seguenti:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ y &= f(x) \quad \text{con } x \in A \text{ e } y \in B \end{aligned}$$

Notiamo esplicitamente che, quando f è un'**applicazione**, la f^{-1} **non** è un'**applicazione**.

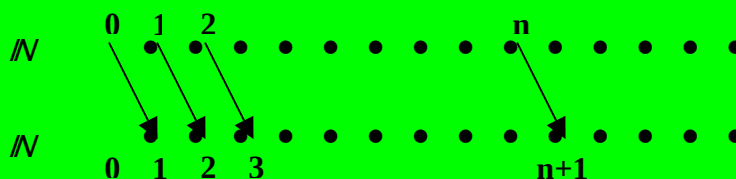
f applicazione $\nRightarrow f^{-1}$ è un'applicazione****

Il **dominio** e il **codominio** di un'applicazione f vengono indicati rispettivamente con $\text{dom } f$ e $\text{codom } f$.



ESEMPIO

1. La **relazione** $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $n+1 \in \mathbb{N}$ è un' **applicazione** di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$:



2. La **relazione** $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che ad ogni $x \in \mathbb{Z}$ associa il suo quadrato è un' **applicazione** di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$

Nella definizione di **applicazione** gli elementi di A hanno un ruolo *prioritario* rispetto a quelli di B : infatti data una relazione $R \subseteq A \times B$, per sapere se essa è un' **applicazione** bisogna *indagare* sugli elementi di A e vedere, per ognuno di essi, **quanti** corrispondenti ha in B .

Sia $f: A \rightarrow B$ un' **applicazione** di A in B .

Si dice che l' **applicazione** f è **iniettiva** se *per ogni coppia di elementi distinti* $x_1 \neq x_2$, *appartenenti ad* A , *risulta*

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

La f , equivalentemente, è **iniettiva** se *non esistono elementi distinti in* A *con la medesima immagine in* B

L'applicazione dell'es. 1 è **iniettiva**: infatti se $n \neq n'$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n+1 \neq n'+1$.

L'applicazione dell'es. 2 **non** è **iniettiva**: esistono infatti **elementi distinti** del dominio $\mathbb{Z}$ che hanno la **medesima immagine** (ad esempio -2 e 2 hanno **entrambi** per immagine 4).

Si dice che l' **applicazione** f è **suriettiva** se *tutti gli elementi di* B *sono immagini degli elementi di* A :

$$f(A) = B$$

L'applicazione dell'es. 1 **non** è **suriettiva**: infatti nell'insieme di arrivo c'è **0** che **non** è **immagine** di alcun elemento del dominio.

Anche l'applicazione dell'es. 2 **non** è **suriettiva**: infatti **-1, -2, -3,...** **non** sono **immagini** di elementi del dominio.

Le **applicazioni iniettive** si dicono anche **iniezioni**; quelle **suriettive** si dicono **suriezioni**.

Come si può osservare dagli esempi, esistono **applicazioni** che **non** sono **né iniettive, né suriettive**, **applicazioni iniettive** ma **non suriettive**, **applicazioni sia iniettive che suriettive**; ma si possono trovare anche esempi di **applicazioni suriettive** ma **non iniettive**.

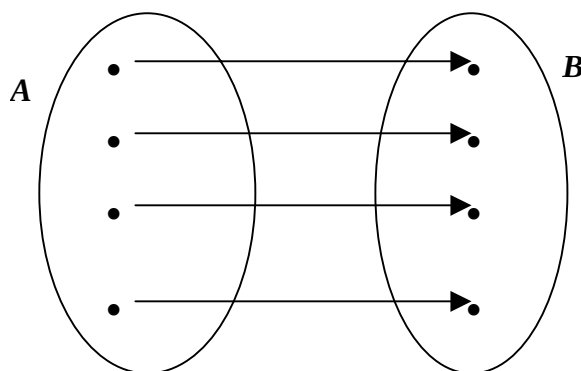
ESEMPIO

Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{a\}$ la **relazione** che **agli elementi di A associa a** è un'**applicazione suriettiva** ma **non iniettiva**.

Se l'**applicazione** $f: A \rightarrow B$ è **sia iniettiva che suriettiva** essa si dice **biunivoca**.

Le **applicazioni biunivoche** vengono chiamate anche **biiezioni**.

Le **applicazioni biunivoche** sono **applicazioni** abbastanza particolari: in esse, **ogni elemento di B** è **immagine** (suriettività) **di un solo** (iniettività) **elemento di A**.



ESEMPIO

Se $P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, la **relazione** $R \subseteq \mathbb{N} \times P$ che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $2n \in P$ è un'**applicazione biunivoca**.

Infatti essa è iniettiva poiché se $n' \neq n''$ allora anche $2n' \neq 2n''$, inoltre ogni elemento di P è immagine di un elemento di N.

OSSERVAZIONE

Se $f: A \rightarrow B$ è un'**applicazione non suriettiva**, vuol dire che **esistono in B elementi che non sono immagini di alcun elemento di A** .

Se si considera come **insieme d'arrivo $f(A)$** , anziché B , è evidente che **l'applicazione f diventa suriettiva**.

Pertanto, se un'**applicazione $f: A \rightarrow B$ non è suriettiva**, si può **sempre renderla tale** considerandola come $f: A \rightarrow f(A)$, anche se, a rigore, $f: A \rightarrow f(A)$ è diversa da $f: A \rightarrow B$, avendo diverso l'**insieme d'arrivo**.

Teorema

Le applicazioni biettive sono tutte e sole le applicazioni le cui relazioni inverse sono ancora applicazioni.

Dimostrazione

Sia, infatti, $f: A \rightarrow B$ un'**applicazione biettiva**, allora l'**applicazione $g: B \rightarrow A$** che ad **ogni elemento di b di B associa l'elemento a di A di cui è corrispondente in f** è proprio la **relazione inversa di f** .

Inversamente sia $f: A \rightarrow B$ un'**applicazione tale che la sua relazione inversa f^{-1} sia un'applicazione di B in A** . Allora f è **suriettiva**, considerato $b \in B$, esso è l'**immagine di $f^{-1}(b)$** , ed è **iniettiva**, poiché, **se non lo fosse, esisterebbero x e x'** , tali che $f(x) = f(x') = b$, e l'elemento b avrebbe, quindi, **due corrispondenti** attraverso la f^{-1} , che, per ciò, **non sarebbe un'applicazione**.

Quando si considerano **applicazioni tra insiemi infiniti**, si possono presentare situazioni **apparentemente contrastanti** con le idee che ci siamo formati operando con gli insiemi finiti.

Se A è un **insieme finito**, è abbastanza intuitivo il fatto che **non si possa porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria**; ciò **non accade** con gli **insiemi infiniti**.

Ad esempio **due segmenti di lunghezze diverse** si possono facilmente **porre in corrispondenza biunivoca**, utilizzando semplici costruzioni geometriche.

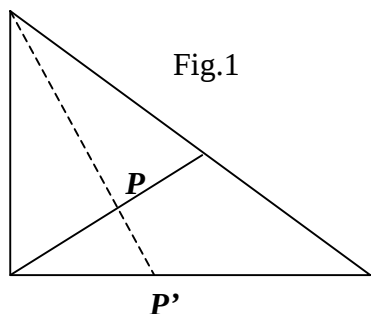
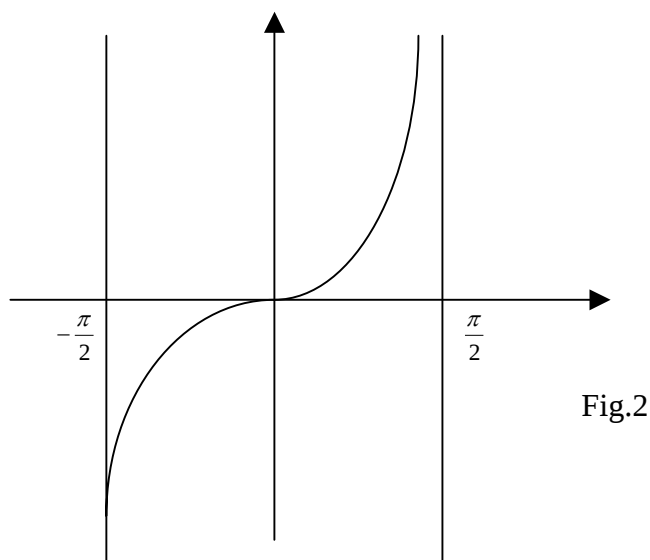


Fig.1

La corrispondenza ottenuta, nella figura 1, proiettando P su P' è un'**applicazione biettiva**.

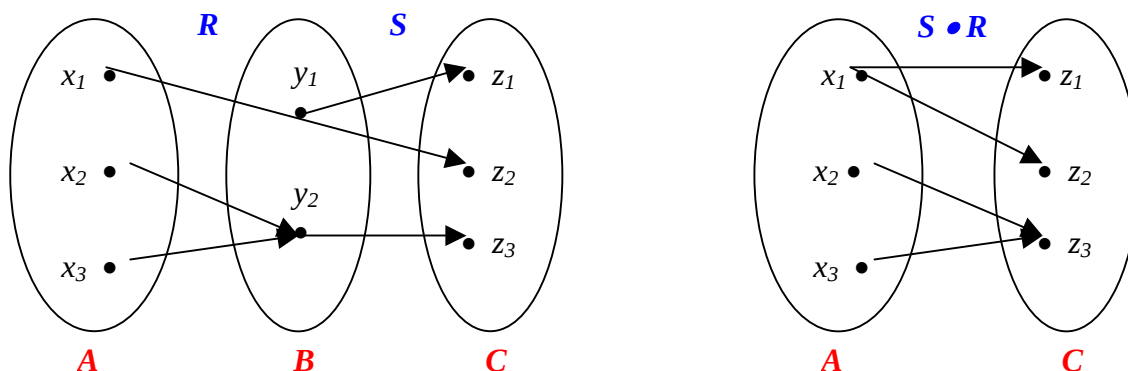
E' facile anche costruire un'**applicazione biettiva** tra un **segmento aperto** e **tutta la retta**: basta considerare il segmento aperto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e la funzione **$y = \text{tg } x$** che ad **ogni x del segmento considerato associa un punto della funzione.**(fig.2)



7. COMPOSIZIONE di RELAZIONI e di APPLICAZIONI

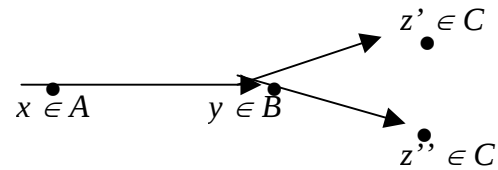
Siano $R \subseteq A \times B$ ed $S \subseteq B \times C$ due **relazioni**, nelle quali l'insieme di *arrivo* della R coincida con l'insieme di *partenza* della S .

Si dice **composizione R per S** e si indica con **$S \bullet R$** la **relazione che associa elementi di A ad elementi di C** nel modo seguente
 $x \in A$ è in relazione $S \bullet R$ con $z \in C \Leftrightarrow$ esiste un $y \in B$ tale che risulti
 x in relazione R con y
 y in relazione S con z



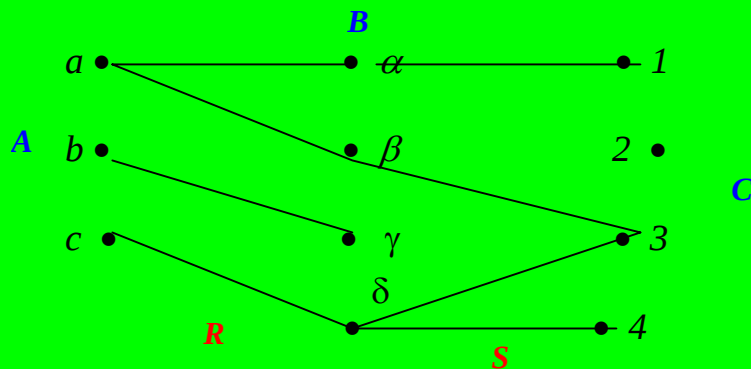
La **relazione $S \bullet R$** è anche detta **relazione prodotto** o **relazione composta**. Gli elementi dell'insieme intermedio B si comportano come dei veri e propri ripetitori.

Si pensi ad un *segnale* che *parte* da $x \in A$ viene *ricevuto* da $y \in B$ e *trasmesso* a $z \in C$. Il risultato dell'operazione è che il *segnale* passa da $x \in A$ a $z \in C$, ma ciò è possibile solo perché *esiste* $y \in B$ che riceve da x e trasmette a z .

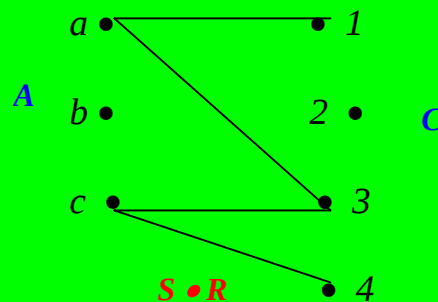


ESEMPI

1. Siano $A = \{a, b, c\}$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Se $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ sono così definite:



Si ha:



2. Siano $P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ e $T = \{0, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$; siano $R \subseteq N \times P$ la *relazione* che *ad* $n \in N$ associa $2n \in P$ e $S \subseteq P \times T$ la *relazione* che *ad* $m \in P$ associa $m^2 \in T$.

La relazione $S \circ R$ opera associando *ad* $n \in N$ l'elemento $4n^2 \in T$.

Infatti, fissati $n \in N$ e $z \in T$ risulta

n in relazione $S \circ R$ con z se esiste un $y \in P$ tale che



Ma n in relazione R con y significa $y = 2n$, z in relazione S con y significa $z = y^2$; quindi, in definitiva,

$$z = y^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

Nel caso che R ed S siano due **relazioni** definite entrambe in un insieme A , ci si può chiedere se i prodotti $S \bullet R$ e $R \bullet S$ siano eguali. Si vede facilmente che in generale risulta $S \bullet R \neq R \bullet S$.

Infatti, si considerino le relazioni R ed S , definite in $\mathbb{N}$ così definite:

R associa ad $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $n+1 \in \mathbb{N}$

S associa ad $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $n^2 \in \mathbb{N}$

Risulta:



Come risulta evidente la **relazione** $S \bullet R$ ad $n \in \mathbb{N}$ associa $(n+1)^2$, la **relazione** $R \bullet S$ ad $n \in \mathbb{N}$ associa n^2+1 .

Per $n \neq 0$ è $(n+1)^2 \neq n^2+1$ e quindi $S \bullet R \neq R \bullet S$.

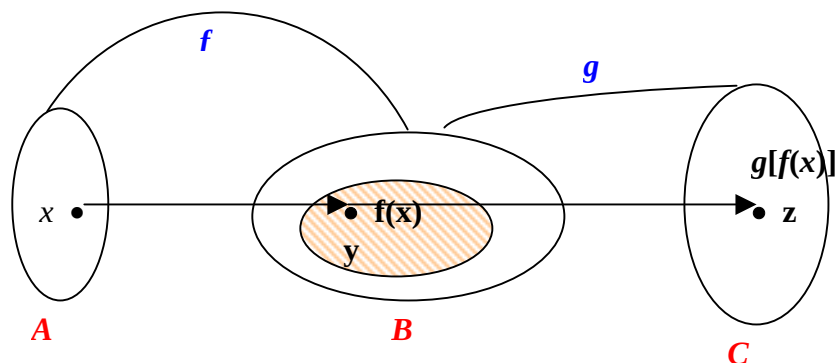
Si vede facilmente che

se R ed S sono **due applicazioni** $\Rightarrow S \bullet R$ è un'applicazione

Infatti per ipotesi la R ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $y \in B$, la S ad ogni elemento $y \in B$ associa un solo elemento $z \in C$; dunque
 $S \bullet R$ è un'applicazione.

Si ha quindi:

Date le **applicazioni** $f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$, la loro **relazione composta** (detta anche **funzione composta** o **funzione di funzione**) è l'**applicazione**
 $g \bullet f: A \rightarrow C$
 che **ad ogni** $x \in A$ **associa** l'elemento $g[f(x)]$



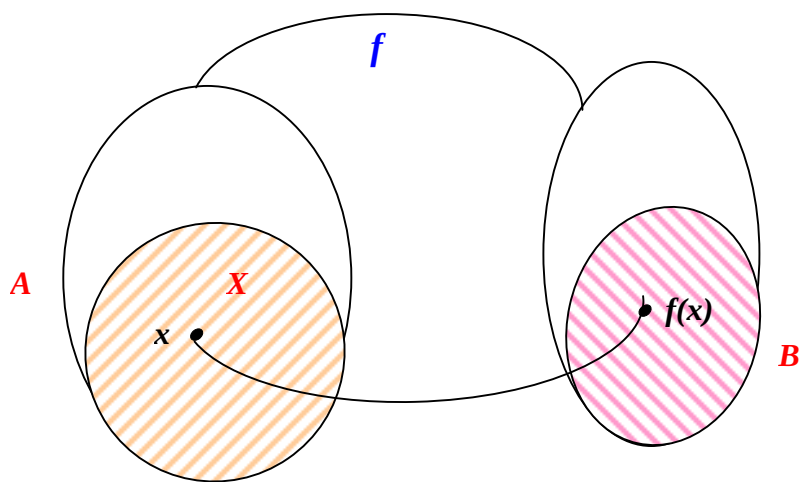
Infatti considerati $x \in A$ e $z \in C$, z è l'**immagine** di x **secondo** la $g \bullet f$, cioè **esiste** un $y \in B$ tale che $y = f(x)$ e $z = g(y)$, da cui $z = g[f(x)]$.

Nelle considerazioni precedenti è essenziale il fatto che $f(A) \subseteq \text{dom } g = B$: ciò permette di trovare un **corrispondente** in B del tipo $g[f(x)]$, per ogni $x \in A$. La condizione $f(A) \subseteq \text{dom } g$ è assicurata dal fatto che l'insieme d'arrivo della f è uguale all'insieme di partenza della g . Si può, tuttavia, definire una *legge* del tipo $g[f(x)]$ anche nei casi in cui non è $f(A) \subseteq \text{dom } g$, purchè sia $f(A) \cap \text{dom } g \neq \emptyset$.

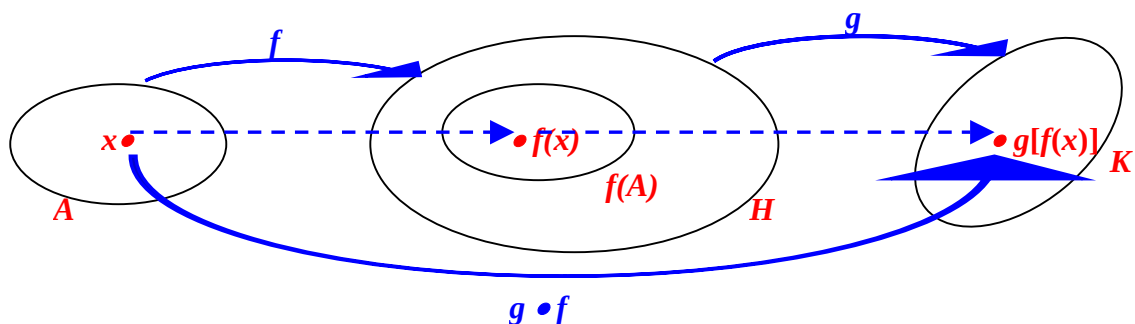
Sia $X \subseteq A$ si dice **restrizione della f a X** , e si indica con f/X , l'**applicazione f** considerata solo nell'insieme X anziché in tutto A . Più esattamente, la **restrizione di f a X** è l'**applicazione**

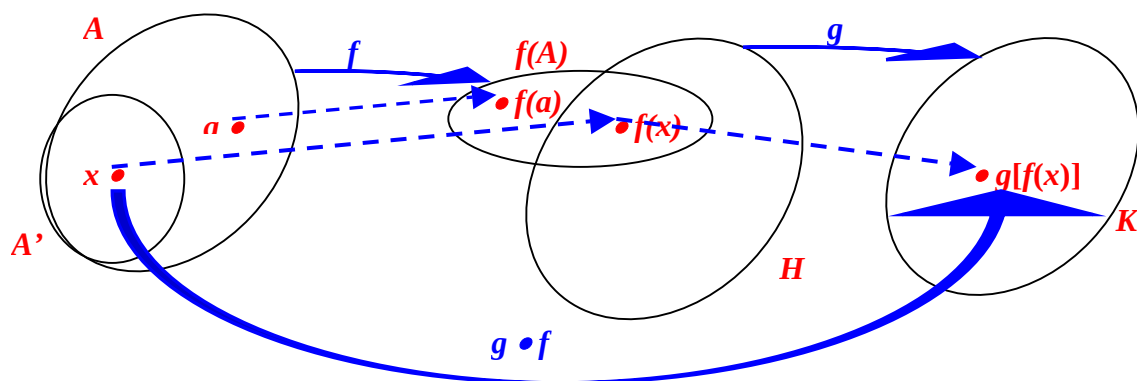
$$f/X: X \rightarrow B$$

che ad ogni $x \in X$ associa $f(x) \in B$.



Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: H \rightarrow K$ due **applicazioni** tali che $f(A) \cap H \neq \emptyset$; se $f(A) \subseteq H$, il **prodotto di composizione $g \circ f$** esiste.
 Sia $f(A) \not\subseteq H$ e $f(A) \cap H \neq \emptyset$.





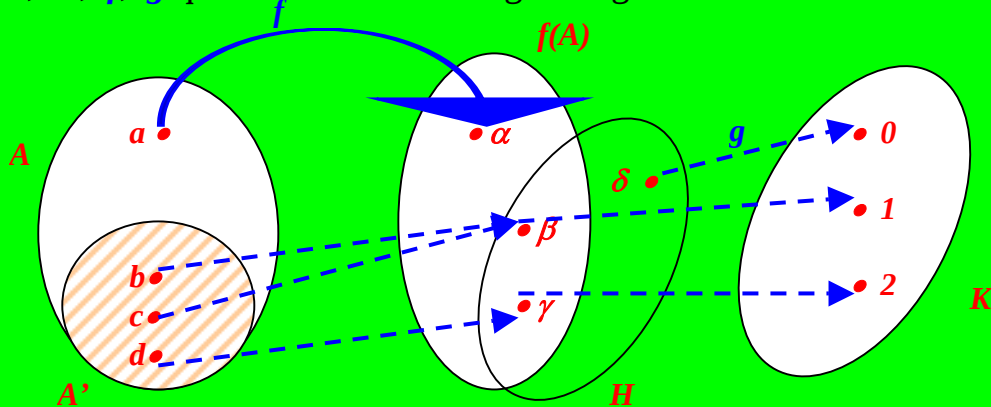
Se $A' = \{x \in A : f(x) \in H\}$, per ogni $x \in A'$ è possibile determinare $g[f(x)]$. E' anche evidente che, se $a \in A$ ma $a \notin A'$, poiché $f(a) \notin H$, non esiste $g[f(x)]$.

Se $f: A \rightarrow B$ e $g: H \rightarrow K$ sono due **applicazioni tali che** $f(A) \cap H \neq \emptyset$, per **applicazione composta** $g \circ f$ si intende l'**applicazione** che ha per **dominio** $A' = \{x \in A : f(x) \in \text{dom } g\}$ e che **ad ogni** $x \in A'$ **associa** **quell'elemento** $z \in K$ **tale che** $z = g[f(x)]$

Nel caso in cui $f(A) \cap H = \emptyset$ **non è possibile** determinare la **funzione composta** $g \circ f$.

ESEMPIO

Siano A, H, K, f, g quelli descritti nella figura seguente:



Si ha $A' = \{x \in A : f(x) \in \text{dom } g = H\} = \{b, c, d\}$. La $g \circ f$ è definita in A' e si ha:

$$g \circ f.(b) = g[f(b)] = g(\beta) = 1$$

$$g \circ f.(c) = g[f(c)] = g(\beta) = 1$$

$$g \circ f.(d) = g[f(d)] = g(y) = 2$$

8. PARTICOLARI RELAZIONI $R \subseteq A \times A$

Sia $R \subseteq A \times A$ una **relazione** definita in un insieme A .

R gode della **proprietà riflessiva** $\Leftrightarrow$ ogni elemento $x \in A$ è in relazione con se stesso

$$\forall x \in A \quad x R x$$

La **relazione** di **inclusione** $\subseteq$ tra sottoinsiemi di un insieme X è **riflessiva**: infatti risulta

$$Y \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq X$$

La **relazione** di **perpendicolarità** $\perp$ tra rette di un piano **non è riflessiva**.

La **relazione minore o uguale** $\leq$ in $\mathcal{Q}$ è **riflessiva**.

Si dice che R gode della **proprietà simmetrica** $\Leftrightarrow$ si verifica che **se** $x \in A$ è in relazione R con $y \in A$ allora anche y è in relazione R con x

$$\forall x, y \in A \quad e \quad x R y \Rightarrow y R x$$

Le **relazioni** di **inclusione** $\subseteq$ (tra sottoinsiemi di un insieme X) e di **minore o uguale** $\leq$ (in $\mathcal{Q}$) **non** sono **simmetriche**: da $A \subseteq B$ **non segue** necessariamente che $B \subseteq A$ e da $x \leq y$ **non segue** $y \leq x$.

La **relazione** di **perpendicolarità** tra rette di un piano **è simmetrica**: se $r \perp s$ allora è anche $s \perp r$.

Si dice che R gode della **proprietà transitiva** $\Leftrightarrow$ si verifica che *se $x \in A$ è in relazione R con $y \in A$ e y è in relazione R con $z \in A$ risulta che x è in relazione R con z*

$$\forall x, y, z \in A \text{ e } (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$$

Le **relazioni** di **inclusione** $\subseteq$ (tra sottoinsiemi di un insieme X) e di **minore o uguale** $\leq$ (in $\mathbb{Q}$) sono **transitive**.

La **relazione** di **perpendicolarità** $\perp$ tra rette di un piano **non** è **transitiva**:

$$\text{se } r \perp s \text{ e } s \perp t \text{ non è } r \perp t$$

Si dice che R gode della **proprietà antisimmetrica** $\Leftrightarrow$ *per ogni coppia di elementi distinti $x, y \in A$ non è mai contemporaneamente x in relazione R con y e y in relazione R con x*

$$\forall x, y \in A \text{ e } x \neq y \text{ non è}$$

$$x R y \text{ e } y R x \text{ contemporaneamente}$$

In modo equivalente si può dire che R è **antisimmetrica** $\Leftrightarrow$ *per ogni coppia di elementi $x, y \in A$ tali che sia $x R y$ e $y R x$ allora risulta necessariamente $x = y$.*

Le **relazioni** di **inclusione** $\subseteq$ (tra sottoinsiemi di un insieme X) e di **minore o uguale** $\leq$ (in $\mathbb{Q}$) sono **antisimmetriche**.

Infatti, siano Y e Z due sottoinsiemi qualsiasi di un insieme X ; se $Y \subseteq Z$ e $Z \subseteq Y$ allora $Y = Z$ e se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$.

La **relazione** di **perpendicolarità** $\perp$ tra rette di un piano **non** è **antisimmetrica**.

Si dice che R è **totale** $\Leftrightarrow$ *per ogni coppia di elementi $x, y \in A$ si verifica almeno una delle condizioni $x R y$ o $y R x$.*

Si dice anche che R è **totale** *se tutti gli elementi di A sono confrontabili*, cioè che *non si verifica mai che $x R y$ o $y R x$ contemporaneamente.*

La **relazione** di **inclusione** $\subseteq$ tra sottoinsiemi di un insieme X **non** è **totale**.

Infatti se $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{a, b\}$ $Z = \{b, c\}$, Y e Z sono due sottoinsiemi di X per i quali **non** è vero né $Y \subseteq Z$ né $Z \subseteq Y$.

La **relazione minore o uguale** $\leq$ in $\mathbb{Q}$ è **totale**: comunque si prendano due numeri x e y è vero che o $x \leq y$ o $y \leq x$ (se $x = y$ si verificano entrambe).

9. RELAZIONE DI EQUIVALENZA

Sia A un insieme astratto di elementi.

Gli elementi di A , a seconda dell'aspetto che si vuole enfatizzare, si diranno **oggetti, elementi, punti, segmenti** e molte altre cose come *ad esempio alternative di situazioni concrete economiche, finanziarie, gestionali, politiche, logistiche*.

Una **relazione** su A può o no verificare alcune condizioni fondamentali e, a seconda che essa abbia o no determinati requisiti, può svilupparsi o meno una particolare *teoria*.

Una prima classe di **relazioni** è costituita dalle **relazioni di equivalenza**, onnipresenti in Matematica.

Una **relazione** R sull'insieme A si dice **relazione di equivalenza** $\Leftrightarrow$ essa gode delle seguenti tre **proprietà**:

1. $\forall x \in A \Rightarrow x R x$ **proprietà riflessiva**
2. $\forall x, y \in A \text{ e } x R y \Rightarrow y R x$ **proprietà simmetrica**
3. $\forall x, y, z \in A \text{ e } (x R y \text{ e } y R z) \Rightarrow x R z$ **proprietà transitiva**

ESEMPI

1. Sia α un piano qualsiasi. Due rette r ed s di α si dicono **parallele** ($r \parallel s$) se esse **coincidono** ($r \equiv s$) oppure se **non hanno alcun punto in comune** ($r \cap s = \emptyset$). Nell'insieme delle rette del piano la **relazione di parallelismo** è una **relazione di equivalenza**. Infatti è

$$r \parallel r \quad \forall r \in \alpha; \quad \text{se } r \parallel s \Rightarrow s \parallel r; \quad \text{se } r \parallel s \text{ e } s \parallel t \Rightarrow r \parallel t.$$

2. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, sia R la **relazione** così definita $(m, n) R (p, q) \Leftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$.
Ad esempio è $(4, 5) R (8, 10)$ perché $4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$; così pure $(2, -3) R (6, -9)$.

La **relazione** R è una **relazione di equivalenza**. Infatti risulta

$$\begin{aligned} & (m, n) R (m, n) \quad \forall (m, n) \\ & \text{se } (m, n) R (p, q) \text{ allora } (p, q) R (m, n) \\ & \text{se } (m, n) R (p, q) \text{ e } (p, q) R (r, s) \text{ allora } (m, n) R (r, s) \end{aligned}$$

3. Se C è l'insieme delle città italiane, la **relazione** R che **ad ogni città A associa le città B tali che A appartiene alla stessa regione di B** è una **relazione di equivalenza**.
4. Se K è l'insieme dei calciatori delle squadre italiane, la **relazione** R che **ad ogni calciatore $x \in K$ associa tutti i calciatori $y \in K$ tali che x appartiene alla medesima squadra di y** è una **relazione di equivalenza**.

Le **relazioni di equivalenza** talvolta si indicano con il simbolo $\simeq$.

La scrittura $x \simeq y$ si legge **x equivalente ad y** .

Sia A un insieme ed R una **relazione di equivalenza** su A .

Per ogni $x \in A$ denotiamo con A_x l'insieme di tutti gli $y \in A$ tali che $y R x$; poniamo cioè

$$A_x = \{y : y \in A, y R x\}$$

Si ha subito che :

$$\begin{aligned} (a) \quad & x R x' \Rightarrow A_x = A_{x'} \\ (b) \quad & x \text{ non } R x' \Rightarrow A_x \cap A_{x'} = \emptyset \end{aligned}$$

La proprietà (a) è banale.

Per la (b) si supponga **per assurdo l'esistenza di un elemento $y \in A_x \cap A_{x'}$** ; segue allora dalle proprietà 2 e 3 **$x R x'$ contro l'ipotesi**.

Segue dunque che la **famiglia degli insiemi** A_x tra loro **disgiunti** e detti **classi di equivalenza**, formano una **partizione** di A , cioè **una famiglia di insiemi a due a due disgiunti la cui unione è l'insieme A stesso**; questa **famiglia** è chiamata **partizione di A in classi di equivalenza**.

E' piuttosto evidente che un' **equivalenza** può essere assegnata, quando è data una **partizione**; anzi non vi è dubbio che questa è la via più semplice per assegnare una **relazione di equivalenza**.

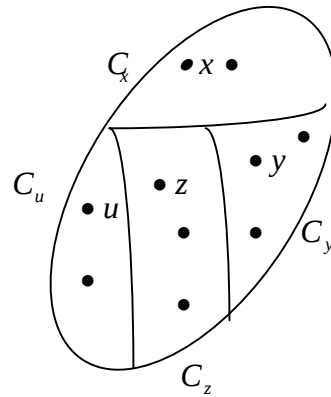
Data una **partizione** $\mathcal{P}$ di A diremo che

$$x R y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ appartengono ad una stessa classe di } \mathcal{P}.$$

Una tale **relazione** R si dice **$\mathcal{P}$ -derivata**

Le **classi di equivalenza** **partizionano** l'insieme dove sono definite: esse lo suddividono in **regioni** o **classi** che **non hanno parti in comune** e che **coprono tutto l'insieme**.

Le classi di equivalenza si possono utilizzare per introdurre nuovi concetti.



Ad esempio la nozione di **direzione** di una retta **r** in un piano α può essere riguardata come la **classe di equivalenza** che comprende **tutte le rette di α parallele ad r**. (cfr. es.1)

Un **numero razionale** $\frac{m}{n}$ può essere riguardato come la **classe di equivalenza** nella quale si trovano **tutte le coppie (p, q)** equivalenti ad **(m, n)** (cfr. es. 2). Ad esempio $\frac{2}{3}$ non è altro che la **classe di equivalenza**

$$\{(2, 3), (4, 6), (8, 12), (-2, -3), \dots\}$$

anche nella vita di tutti i giorni si fa largo uso delle **classi di equivalenza** (più o meno inconsciamente). Le **classi di leva** sono le **classi di equivalenza** nell'insieme di **tutti gli individui** (**x** e **y** sono **equivalenti** se **nati nello stesso anno**: ogni **classe di equivalenza** comprende individui della **stessa classe di leva**); la **classificazione del mondo animale** è una **partizione** in **classi di equivalenza**; la **suddivisione di un continente in stati** (o quella di uno stato in **regioni**) è una **partizione** del **continente** in **classi di equivalenza**;....

Sia A un insieme e sia $\mathcal{P} = \{A_x\}_{x \in I}$ una **partizione** di A .

L'insieme $\mathcal{P}$ a volte si denota con A/R e prende il nome di **insieme quoziente**.

La considerazione di questo insieme nasce allorché si desidera fissare la nostra attenzione sulle **classi di equivalenza** riguardandole come **oggetti**.

A partire da A è dunque determinato un nuovo insieme i cui **oggetti** sono le **classi di equivalenza rispetto ad R**.

L'**applicazione** (**suriettiva** e, in generale, **non iniettiva**):

$$p : A \rightarrow A/R$$

definita $\forall x \in A$ ponendo

$$p(x) = A_x$$

si chiama **proiezione canonica di A nel suo quoziente**.

Usualmente quando si passa da un insieme A al suo **quoziente A/R** rispetto ad una **relazione di equivalenza R** si passa ad un nuovo concetto astratto, ma che porta ad una maggiore astrazione.

E' importante fissare la nostra attenzione sui seguenti **esempi**.

1. **Le direzioni**. Se A è l'**insieme delle rette dello spazio** ed **R** è il **parallelismo** si passa all'**insieme quoziente delle direzioni**.
2. **Le forme delle figure**. Se A è l'**insieme delle forme spaziali** ed **R** è l'**equivalenza geometrica** allora **A/R** è l'**insieme delle forme delle figure**.
3. **Le frazioni**. Se A è l'**insieme delle frazioni** (coppie di interi m/n con $n \neq 0$) ed **R** è l'**eguaglianza in croce** allora **A/R** è l'**insieme dei numeri razionali**.
4. **I numeri naturali nella definizione di Russel**.

Due insiemi A e B **finiti** o **infiniti** si dicono **della stessa potenza (equipotenti)** o **di egual numero cardinale finito** o **infinito** se **è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dei due insiemi**.

In altre parole A e B sono **equipotenti** se **esiste un'applicazione**

$$f : A \rightarrow B$$

che sia **biettiva**.

Si scrive allora

$$A \cong B$$

Proviamo che l'**equipotenza** è una **relazione d'equivalenza** su una **qualsiasi famiglia Ω di insiemi**.

Si prova subito la **proprietà riflessiva**:

$$A \cong A$$

Infatti è sufficiente considerare l'**applicazione identica su A**, cioè quella che **ad ogni elemento di A associa l'elemento stesso**.

Per dimostrare la **proprietà simmetrica** notiamo che se $A \cong B$ allora esiste $f : A \rightarrow B$ che è **biettiva**, questo implica che $f^{-1} : B \rightarrow A$ è anch'essa **biettiva** e quindi risulta $B \cong A$.

Infine per dimostrare la **proprietà transitiva** si supponga che sia $A \cong B$ e $B \cong C$. Ciò significa che esistono le **applicazioni** $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ **biettive**; da esse si può costruire la **loro composizione** $g \circ f: A \rightarrow C$, **biettiva di A in C** e pertanto $A \cong C$.

Il **quoziente della totalità degli insiemi finiti rispetto all'equipotenza** fornisce per astrazione il concetto di **cardinalità**.

Il **quoziente** è dunque l'**insieme delle Cardinalità** o **potenze degli insiemi** ovvero dei **numeri naturali cardinali**.

In questo ordine di idee Bertrand Russell¹ partendo dagli **insiemi concreti** ha costruito una **teoria di numeri naturali** definiti come **cardinali di insiemi concreti**. Senza addentrarsi in queste questioni, l'idea base è una **simulazione** del comportamento di un bambino nell'età prescolare; egli **confronta 3 dita, 3 caramelle, 3 palline** e conquista la **relativa cardinalità** alla quale, con intervento esterno, l'adulto attribuisce nominalmente il simbolo di 3.

5. **I numeri trasfiniti**. La stessa **relazione di equipotenza** trattata sopra può **estendersi** ovviamente anche **agli insiemi infiniti**. Allora le **classi di equivalenza** in ciascuna delle quali **si pongono insiemi infiniti diversi**, ma per i quali esistono **biiezioni dell'uno nell'altro**, danno luogo al concetto di **cardinalità degli insiemi infiniti**.

L'**insieme delle cardinalità degli insiemi infiniti** detto anche **insieme dei numeri trasfiniti** costituisce un interessante capitolo della matematica.

Per entrare nei dettagli, diamo alcune definizioni, e, per cominciare, la definizione formale di **insieme infinito**.

Un insieme A si dice **infinito** se è **equipotente ad un suo sottoinsieme proprio**. In caso contrario A si dice **finito**.

Evidentemente gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono **infiniti**.

L'**insieme dei naturali** $\mathbb{N}$ è **equipotente**, ad esempio, all'**insieme dei numeri pari** $P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$. Infatti l'**applicazione** che ad **ogni** $n \in \mathbb{N}$ **associa** $2n \in P$ è una **biiezione di $\mathbb{N}$ in P** . Ma l'**insieme** $\mathbb{N}$ è anche **equipotente**, come vedremo, a $\mathbb{Z}$ e a $\mathbb{Q}$. La **classe di equivalenza di $\mathbb{N}$** si chiama **potenza del numerabile** e si denota con $\aleph_0$ (**aleph-zero**).

¹ Vedi cenni biografici nelle Biografie allegate

Segue che:

Un insieme A si dice *numerabile* se è equipotente a $\mathbb{N}$.

Il fatto che A sia *numerabile*, ossia che **esiste una corrispondenza biunivoca tra A e $\mathbb{N}$** , significa che **gli elementi di A** possono essere scritti nel modo seguente:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

cioè **assegnando un indice $n \in \mathbb{N}$ ad ognuno di essi**.

Per provare che l'**insieme $\mathbb{Z}$** è *numerabile*, basta osservare che l'**applicazione**

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

definita nel modo seguente:

$$\varphi(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è **biunivoca**; infatti essa porta **0 in 0, 1 in 1, 2 in -1, 3 in -2, 4 in -2** e così via.

Anche $\mathbb{Q}$ è **un insieme numerabile**. E' sufficiente per questo provare che $\mathbb{Q}$ è **contenuto in un insieme numerabile** visto che **contiene $\mathbb{Z}$ che è numerabile**. Basta osservare che l'**insieme delle coppie di interi è numerabile**. Tale insieme si numera nel modo seguente:

(0, 0)
(0, 1) (1, 1)
(0, 2) (1, 2) (2, 2)
.....
(0, n) (1, n)..... (n-1, n) (n, n)
.....

Cancellando la coppia (0, 0) e le coppie (a, b) di elementi a e b non primi tra loro si ha una biiezione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$.

Due esempi di **numeri trasfiniti** sono la **cardinalità del numerabile**, cioè la **classe di equipotenza determinata dall'insieme dei numeri naturali**, che si indica appunto con $\aleph_0$ (**aleph-zero**) e la **cardinalità del continuo**, cioè la **classe di equipotenza determinata dall'insieme dei numeri reali** che si indica con $\aleph_1$ (**aleph-uno**).

Si sa che il **numerabile è minore del continuo** (cioè **i naturali sono equipotenti ad una parte propria dei reali**) ma non è possibile rispondere alla domanda se tra queste

due cardinalità o numeri transfiniti ve ne siano di intermedie. Questo è uno dei grossi enigmi della matematica noto con il nome di ipotesi del continuo.

Più precisamente spostandoci nell'ambito della logica si sa che sono costruibili due diverse *matematiche del transfinito* in ciascuna delle quali può risponderci SI esistono oppure NO non esistono.

6. *La temperatura di un corpo ed il principio zero della Termodinamica.*

E' interessante notare che in trattazioni moderne di termodinamica si introduce *sperimentalmente* la *relazione essere in equilibrio termico* e ciò avviene quando *due corpi messi a contatto raggiungono lo stesso stato termico*.

Questa *relazione* è *riflessiva, simmetrica* e ammettendo il cosiddetto

Principio zero della termodinamica, la *relazione essere in equilibrio termico* è anche *transitiva*.

L'*insieme quoziente* che così nasce è *l'insieme delle temperature*.

La *temperatura T* di un corpo è astrattamente dunque il *quid di comune a tutti i corpi che sono in equilibrio termico tra loro*.

Gli *esempi indicati* provano la onnipresenza delle *relazioni di equivalenza* nel ragionamento qualitativo o nelle astrazioni che si fanno. Dagli *esempi precedentemente visti* emerge inoltre molto bene come *il procedimento di passaggio al quoziente codifica*, generalizzandolo, *quel processo* che normalmente l'uomo compie quando *dal concreto passa all'astratto*, dandone una definizione puramente nominale atta ad indicare quel che di astratto che accomuna *oggetti equivalenti*.

Si pensi alla parola *cane*: si prendono in considerazione gli animali e di essi si costruiscono *partizioni*, una delle *classi di equivalenza* è quella del *cane intesa come classe di tutti i cani concreti*, ma pensata come *astratto nominale*.

Potrebbe intuitivamente dirsi che *il ragionare per relazioni di equivalenza è l'arte di chiamare eguali cose diverse ma che sotto certi aspetti diverse non sono*.

10. RELAZIONI D'ORDINE

Vogliamo ora considerare un altro tipo di *relazioni* su un insieme, non meno importanti delle relazioni di equivalenza.

Si tratta delle cosiddette *relazioni d'ordine*.

Una **relazione** R su un insieme A si dice **relazione d'ordine** se **essa gode delle seguenti proprietà**:

1. $\forall x \in A \Rightarrow x R x$ **proprietà riflessiva**
2. $\forall x, y \in A (x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y$ **proprietà antisimmetrica**
3. $\forall x, y, z \in A (x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z$ **proprietà transitiva**

Una **relazione d'ordine** **differisce** da **quella di equivalenza** per la proprietà 2 che può enunciarsi anche nella forma:

$$a R b \wedge a \neq b \Rightarrow b \text{ non-} R a$$

Una **relazione d'ordine** si dice **totale** se vale l'ulteriore **proprietà di tricotomia**:

$$\forall a, b \in A \quad a \neq b \quad \text{risulta} \quad a R b \quad \text{oppure} \quad b R a$$

Una **relazione d'ordine** **non totale** si dice **parziale**.

ESEMPI

Esempi di **relazioni d'ordine** sono:

- ❖ **L'ordinamento totale dei numeri reali o razionali o interi,**
- ❖ **L'ordinamento parziale $\subseteq$ delle parti di un insieme.**
- ❖ **La divisibilità $/$ nei naturali, come ordine parziale.**

E' facile pensare che l'**inclusione** è **parziale**: infatti **due insiemi distinti o con una parte propria in comune sono inconfrontabili**.

Proviamo che la **divisibilità** è una **relazione d'ordine**.

Sia $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\forall a, b \in N$

$$a/b \text{ (} a \text{ divisibile per } b) \Leftrightarrow \exists k \in N : a = k \cdot b$$

La **divisibilità** gode della **proprietà riflessiva**.

Infatti

$$a/a \Leftrightarrow \exists 1 \in N : a = 1 \cdot a$$

La **divisibilità** gode della **proprietà antisimmetrica**

Dobbiamo dimostrare che se a/b e $b/a \Rightarrow a = b$

$$a/b \Leftrightarrow \exists k \in N : a = k \cdot b$$

$$b/a \Leftrightarrow \exists h \in N : b = h \cdot a$$

$$Q^* = \left\{ \frac{a}{b} : \frac{a}{b} \in Q^*, (a, b) = 1 \right\}$$

Definiamo la **relazione R** in Q^* in questo modo:

$$\frac{a}{b} / \frac{m}{n} \Leftrightarrow a / m \quad b / n \quad \text{in } \mathbb{N}$$

E' facile verificare che si tratta di una **relazione d'ordine parziale**.

ESEMPIO 3 (Ordine lessicografico)

Siano $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ed $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ due **n-ple** o **vettori** di un **insieme ordinato** $(A, \leq)$. Sia data la **relazione R** su A tale che

$$\begin{aligned} & x_1 < y_1 && \text{oppure} \\ & x_1 = y_1, \quad x_2 < y_2 && \text{cioè} \\ \underline{x} \leq \underline{y} \Leftrightarrow & x_1 = y_1, \quad x_2 < y_2, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 < y_3 \end{aligned}$$

.....

$$x_1 = y_1, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, \quad x_n < y_n$$

Il lettore verifichi che tale **relazione** è una **relazione d'ordine parziale**, detta **ordine lessicografico**.

ESEMPIO 4 (Dominanza vettoriale)

Nello **stesso ambiente** dell'esempio 3 definiamo la **relazione** tale che

$$\underline{x} \leq \underline{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Essa è una **relazione di ordine parziale** che prende il nome di **dominanza vettoriale**.

In generale, una relazione d'ordine viene indicata con il simbolo $\leq$.

La scrittura

$$x \leq y$$

si legge **x precede y**.

Se $\leq$ è una **relazione d'ordine definita in A**, la **coppia** $(A, \leq)$ si chiamerà **insieme parzialmente ordinato (poset)** o **totalmente ordinato** a seconda che tale sia la **relazione** $\leq$.

Sia $(A, \leq)$ un **insieme parzialmente ordinato** e sia $B \subseteq A$.

Un **elemento** $L \in A$ si dice **maggiorante di B** $\Leftrightarrow$ **tutti gli elementi di B precedono L.**

Un **elemento** $l \in A$ si dice **minorante di B** $\Leftrightarrow$ **l precede tutti gli elementi di B.**

$$L \text{ maggiorante di } B \Leftrightarrow \forall x \in B \quad x \leq L$$

$$l \text{ minorante di } B \Leftrightarrow \forall x \in B \quad l \leq x$$

ESEMPIO

Sia $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq 4\}$. L'**elemento** $5 \in \mathbb{Q}$ è un **maggiorante di B**, l'**elemento** $-1 \in \mathbb{Q}$ è un **minorante di B**.

Anche **4, 6, 9** sono **maggioranti di B** così come **1, 0, -3** sono **minoranti di B**.

Un $L \in A$ si dice **massimo di B** $\Leftrightarrow$ L è un **maggiorante di B** e $L \in B$.

Il **massimo di B** si denota con $L = \text{Max } B$

Un $l \in A$ si dice **minimo di B** $\Leftrightarrow$ l è un **minorante di B** e $l \in B$

Il **minimo di B** si denota con $l = \text{Min } B$

Riassumendo:

$$L \text{ massimo di } B \quad (l \text{ minimo}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} L \text{ maggiorante di } B \\ (l \text{ minorante}) \\ \\ L \in B \\ (l \in B) \end{array} \right.$$

Riferendoci all'**insieme B** dell'**esempio precedente** si può osservare che **4** è l'**elemento massimo di B**: **4** è **maggiorante di B** ed inoltre $4 \in B$; **non esiste** invece **un elemento** che sia **minimo di B**.

Sia $(A, \leq)$ un **insieme principalmente ordinato**, quali che siano gli elementi $a, b \in A$ denotiamo con $l(a)$ ed $l(b)$ rispettivamente gli **insiemi dei minoranti di a** e di **quelli di b**; può accadere che $l(a) \cap l(b) \neq \emptyset$ e che **questo insieme abbia minimo** e

massimo; essi li diremo rispettivamente **minimo comun minimante** e **massimo comun minuyente**.

Analogamente se $L(a)$ ed $L(b)$ sono l'**insieme dei maggioranti di a** e **di b** ed $L(a) \cap L(b) \neq \emptyset$ si possono definire il **minimo comun maggiorante** ed il **massimo comun maggiorante**.

ESEMPI

In $(\Omega, \subseteq)$ il **minimo comun minimante di due** è una A e B è l'**insieme vuoto**, mentre il **minimo comun minuyente** è $A \cap B$.

Il **massimo comun minuyente** è $A \cup B$ e il **minimo comun maggiorante** è sempre Ω .

In $(\mathbb{N}, 1)$ il **minimo comun minuyente di a e b** è 1 e il **massimo comun minuyente** è il **massimo comun divisore di (a, b)**.

Il **minimo comun maggiorante** è il **minimo comune multiplo tra (a, b)**, **non esiste il massimo comun maggiorante**.

Un $L \in A$ si dice **estremo superiore di B** $\Leftrightarrow L$ è **maggiorante di B** e **L precede tutti i maggioranti di B**.

Un $l \in A$ si dice **estremo inferiore di B** $\Leftrightarrow l$ è **minorante di B** e **tutti i minoranti di B precedono l**.

Riassumendo:

$$\begin{aligned} L \text{ estremo superiore di } B &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L \text{ maggiorante di } B \\ L = \sup B \\ L \leq y \quad \forall y \text{ maggiorante di } B \end{array} \right. \\ l \text{ estremo inferiore di } B &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} l \text{ minorante di } B \\ l = \inf B \\ y \leq l \quad \forall y \text{ minorante di } B \end{array} \right. \end{aligned}$$

Facendo riferimento all'**insieme** $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq 4\}$ si ha:

$$4 = \sup B \quad 1 = \inf B$$

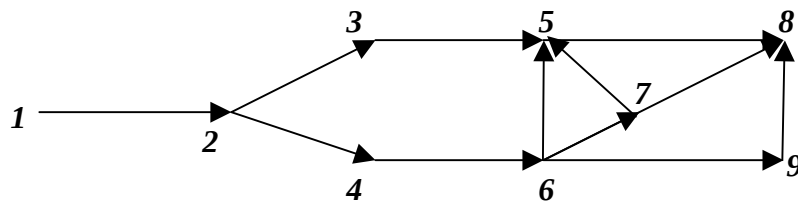
Si verifica facilmente che i **maggioranti di B sono tutte le $x \geq 1$** .

Dalle definizioni precedenti segue che, detti M_B l'**insieme di tutti i maggioranti di B** ed N_B l'**insieme di tutti i minoranti di B**, allora

$$\sup B = \min M_B \quad \inf B = \max N_B$$

ESEMPI

1. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ed il seguente **grafo** su esso definito:



In A è definita una **relazione d'ordine $\leq$ tale che $x \leq y$ significa è possibile andare da x a y** .

Se $B = \{3, 4, 5, 6\}$ si ha $M_B = \{5, 8\}$ e $N_B = \{1, 2\}$.

Risulta pertanto

$\max B = 5$, mentre **non esiste $\min B$** ;

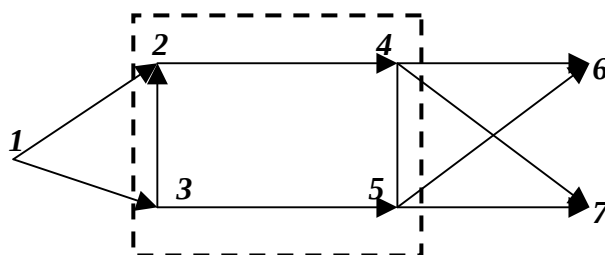
si ha inoltre

$$\sup B = 5 \quad \inf B = 2$$

Si osservi poi che gli elementi **7, 9 non sono maggioranti di B**.

2. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Si consideri il **grafo** seguente e la **relativa relazione d'ordine $\leq$** :



Si verifica facilmente che **B non ha** né **massimo**, né **estremo superiore**; l'**insieme dei suoi maggioranti** è $M_B = \{6, 7\}$.

Si dice che **un insieme** $B \subseteq A$ è **limitato superiormente** $\Leftrightarrow$ **esiste un** $L \in A$ **maggiorante di** B .

Si dice che **un insieme** $B \subseteq A$ è **limitato inferiormente** $\Leftrightarrow$ **esiste un** $l \in A$ **minorante di** B .

Un insieme $B \subseteq A$ che sia **limitato sia superiormente** che **inferiormente** si dice **limitato**

L'**insieme** $B_1 = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 8\}$ è **limitato** (**inferiormente** e **superiormente**).

L'**insieme** $B_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 2\}$ è **limitato inferiormente** ma **non superiormente**.

L'**insieme** $B_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 5\}$ è **limitato superiormente** ma **non inferiormente**.

Dato un insieme ordinato $(A, \leq)$ e $B \subseteq A$ dimostriamo le seguenti proposizioni:

Prop. 1

Se B ha un estremo superiore (inferiore) questo è unico.

Dimostrazione

Siano $L = \sup B$, $M = \sup B$, inoltre L e M sono **entrambi maggioranti di** B .

Dal fatto che l'**estremo superiore di un insieme precede tutti i maggioranti dell'insieme** segue:

$$L = \sup B \Rightarrow L \leq M \quad (\text{maggiorante})$$

$$M = \sup B \Rightarrow M \leq L \quad (\text{maggiorante})$$

Per la **proprietà antisimmetrica** risulta allora

$$L = M$$

Prop. 2

Sia $L = \sup B$. Se $L \in B$ allora L è massimo di B .

(Analogamente se $l = \inf B$ ed $l \in B$ allora l è minimo di B .)

Dimostrazione

Facilmente si ottiene che se $L = \sup B$ ed $L \in B$, allora L è un **maggiorante di B che appartiene all'insieme B** . Dunque

$$L = \max B$$

Prop. 3

*Se L è massimo di B allora L è estremo superiore di B .
(Se l è minimo di B allora l è estremo inferiore di B).*

Dimostrazione

Se $L = \max B$ allora L è **maggiorante di B** .

Inoltre, poiché $L \in B$, L **precede tutti i maggioranti di B** .

Segue che:

$$L = \sup B$$

Dalle prop. 1 e 3 si ha

Prop. 4

*Se B ha massimo, questo è unico.
(Se B ha minimo, questo è unico).*

Prop. 5

*Se L è estremo superiore di B ed $L \notin B$ allora B non ha massimo.
(Se l è estremo inferiore di B ed $l \notin B$ allora B non ha minimo).*

Dimostrazione

Se $M = \max B$ per definizione di **massimo** $M \in B$.

Per la prop. 3 deve essere $M = L$ con L **che non appartiene a B per ipotesi**.

11. LE PERMUTAZIONI – LE DISPOSIZIONI SEMPLICI

Sia $A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \}$ un insieme finito.

Ogni **ordinamento totale costruibile su A** si chiama **permutazione su A** .

*Si può provare che, detto P_n il numero delle permutazioni su n oggetti, risulta:
 $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$*

Dimostrazione

Si ha subito che $P_1 = 1! = 1$ $P_2 = 2! = 2$.

Supponiamo quindi di ammettere che

$$P_{n-1} = (n-1)!$$

pertanto **un insieme B di $n-1$ elementi** si può **ordinare in $(n-1)!$ modi**.

Sia α un oggetto tale che $\alpha \notin B$. Per ogni ordinamento dato, l'elemento α si può collocare davanti ad a_1 , tra a_1 e a_2 e così via fino all'ultimo posto, si può collocare cioè in n modi.

Dunque da ogni ordinamento di B se ne ottengono n di $B \cup \{\alpha\}$; per cui

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n!$$

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, se esso precede l'ordine naturale, una permutazione $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ di A si dice di classe pari o dispari a seconda che per ristabilire l'ordine precedente si debbano eseguire un numero pari o dispari di scambi.

Naturalmente, poiché operando su A con uno scambio alla volta si passa dal pari al dispari, le permutazioni di classe pari e quelle di classe dispari sono in egual numero, cioè, per $n > 2$, sono $n!/2$.

Si chiamano disposizioni semplici di n oggetti ad h ad h gli ordinamenti che possono farsi su una qualsiasi parte di A costituita da h oggetti

Indicato con $D_{n,h}$ il numero delle disposizioni semplici di n oggetti ad h ad h , poiché ci sono $\binom{n}{h}$ possibili parti ed ognuna di esse può essere ordinata in $h!$ modi, si ha che

$$D_{n,h} = \binom{n}{h} \cdot h! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-h+1)$$

Proviamo ora il seguente

TEOREMA

Sia $0 \leq k \leq n$. ad ogni disposizione di n elementi ad h ad h è associata un'applicazione iniettiva dei k -insiemi $\{1, 2, \dots, k\}$ in un n -insieme e viceversa.

Dimostrazione

Sia dato un n -insieme A e sia $B = \{1, 2, \dots, k\}$ un sottoinsieme ordinato di A .

Allora l'applicazione $f: B \rightarrow A$ tale che $f(i) = a_i \quad \forall a_i \in B$ è un'applicazione iniettiva di $\{1, 2, \dots, k\}$ in A .

Inversamente data un'applicazione iniettiva f di $\{1, 2, \dots, k\}$ in A resta fissato in A l'insieme ordinato $\{f(1), f(2), \dots, f(k)\}$.

Come caso particolare una partizione di un n -insieme A è una biiezione tra $\{1, 2, \dots, n\}$ ed A .

ESEMPI

- 1) Un allenatore di una squadra di calcio ha 7 attaccanti cui affidare le maglie n.7, n.8, n.9, n.10, n.11. quanti possibili attacchi può schierare?

Bisogna **determinare** $D_{7,5}$: ossia il **numero delle cinque ordinate** che si **possono formare con i 7 attaccanti**.

Si ha

$$D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2520.$$

- 2) Quanti tricolori si possono formare con i colori rosso, blu, verde, giallo?

Risulta

$$D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

- 3) In quanti modi si possono sistemare tre libri A, B, C su uno scaffale uno accanto all'altro?

Si ha

$$P_3 = 3! = 6$$

$$\begin{array}{ccc} A, B, C & B, A, C & C, A, B \\ A, C, B & B, C, A & C, B, A \end{array}$$

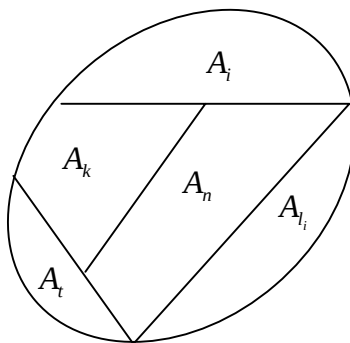
12. LA RELAZIONE DI PREFERENZA - INDIFFERENZA

Siamo giunti ora a definire una **relazione** che è in un certo qual senso una **generalizzazione di quella di ordine parziale**.

Sia A un **insieme non vuoto** i cui **elementi** nell'ambito dell'**Economia Matematica** si dicono le **alternative**.

Supponiamo che su A siano definite due **relazioni** **P** ed **I** come segue:

- a) **I** è una **relazione di equivalenza su A** che determina sull'insieme A **una partizione** $\mathcal{I}$ in **classi** che diremo **classi di indifferenza**.



Se è $x I y$ leggeremo l'*alternativa x è indifferente all'alternativa y* .

- b) $\forall x, y \in A$ se è $x \text{ non } I y$ risulta $x P y$ oppure $y P x$ (*proprietà di disconnessione tra le classi di indifferenza*).

Se è $x P y$ leggeremo *x è preferito ad y* .

- c) $\forall x, y, z \in A: x P y \wedge y P z \Rightarrow x P z$ (*proprietà transitiva di P*).

La *relazione composta mediante la coppia di relazioni (P, I)* dicesi *relazione di preferenza – indifferenza*.

Taluni autori invece della *coppia di relazione (P, I)* usano una notazione unica $\leq$. Il simbolo $\leq$ è definito ponendo $\forall x, y \in A$

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x I y \\ x P y \end{cases}$$

Si noti inoltre che se le *classi di indifferenza* si riducono ad un *solo elemento* la *relazione $\leq$* è una *relazione di ordine totale*.

Altresì una *relazione di preferenza – indifferenza* può essere pensata come *ordine parziale* in cui i *singleton* sono *esplosi* in *vaste classi di indifferenza*.

Un modo costruttivo per assegnare una preferenza può essere il seguente:

- a) Fissato A si dia una *partizione di A in classi* (*classi di indifferenza*)

- b) Si dia una *relazione d'ordine totale* τ nel *quoziente A/I*

- c) Comunque si considerino $x, y \in A$ con x e y *non indifferenti* si avrà che

$$x P y \Leftrightarrow A_x \tau A_y.$$

E' anche evidente che *la coppia (P^{-1}, I^{-1})* è ancora una *preferenza – indifferenza* se lo è (P, I) .

Sia A *un insieme* e sia (P, I) *una preferenza – indifferenza su A* .

Chiamiamo *ambiente di alternative $S \subseteq A$* ogni *sottoinsieme finito di A* .

La *restrizione di (P, I) ad S* è una *relazione di preferenza – indifferenza su S* .

Essendo l'**insieme S finito**, tra le **classi determinate da I su S** ne esiste **una** che è **minima** nel senso che **i suoi elementi, indifferenti tra loro, sono preferiti ai rimanenti**.

Questa **classe minima** si denota con

$$C(S)$$

e si dirà **insieme delle alternative scelte**.

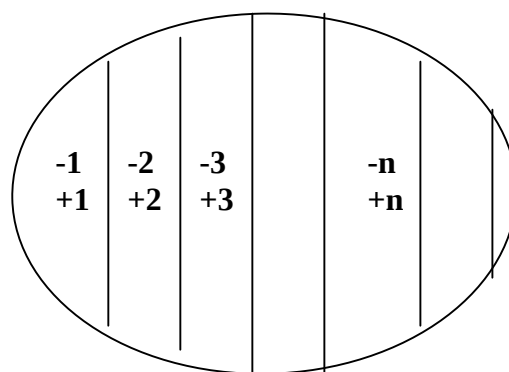
La **legge C** che **ad ogni alternativa S associa l'insieme $C(S)$** si chiama **funzione di scelta**.

ESEMPIO 1

Sia Z_0 l'**insieme degli interi relativi privati dello 0**.

Consideriamo la **partizione** costituita dagli **insiemi del tipo**

$$\{-n, +n\}$$



Presi **$a, b \in \mathbb{Z}$** diciamo che **$a \mid b$ in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow |a| \mid |b|$ in $\mathbb{N}$** .

La **relazione $\mid$** è un **esempio** di **preferenza – indifferenza**.

ESEMPIO 2

Sia **$A[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile del tipo:**

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Due polinomi si dicono equivalenti quando differiscono per una costante moltiplicativa.

Diciamo che il **polinomio $p(x)$ divide il polinomio $q(x)$** , e si scrive

$$p(x) \mid q(x) \Leftrightarrow \text{esiste un polinomio } k(x) \text{ tale che } p(x) = q(x) \cdot k(x)$$

La **relazione $\mid$** è, come subito si verifica, una **relazione di preferenza – indifferenza**.