Sistemi lineari non omogenei

1. Introduzione ai sistemi di equazioni lineari

Una retta, nel piano, è rappresentata con una equazione della forma:

$$ax + by + c = 0.$$

Un'equazione di questo tipo viene detta equazione lineare nelle incognite x ed y.
Più in generale chiameremo ***equazione lineare*** nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un'equazione di primo grado che si può scrivere nella forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots\cdots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

dove i termini $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ e b si dicono, rispettivamente ***coefficienti*** e ***termine noto***. Se b è nullo, l'equazione si dice ***omogenea***, se b è diverso da zero l'equazione si dice ***non omogenea***.
Si chiama ***soluzione*** dell'equazione ogni n-pla ordinata di numeri che, sostituiti alle incognite rendano uguali i due membri dell'equazione stessa.
Un insieme di m equazioni lineari nelle medesime n incognite di cui si cercano le soluzioni viene detto ***sistema lineare di m equazioni in n incognite***.
Un sistema di questo tipo si è soliti rappresentarlo nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_x = b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

In particolare il sistema si dice ***omogeneo*** se tutte le b_i sono nulle, si dice ***non omogeneo*** quando almeno una delle b_i è diversa da zero.
Si chiama soluzione del sistema (2) ogni n-pla ordinata $(k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n)$ che soddisfa tutte le equazioni del sistema.
Un sistema si dice ***compatibile*** se ammette almeno una soluzione; ***incompatibile*** in caso contrario.
Un sistema compatibile si dice ***determinato*** se possiede una sola soluzione; in caso contrario si dirà ***indeterminato***, ed in questo caso, come vedremo, possiede sempre infinite soluzioni.
Si chiama ***matrice dei coefficienti*** (o ***incompleta***) del sistema (2) la matrice:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|$$

del tipo $m \times n$ i cui elementi sono i coefficienti delle incognite, mentre la matrice ottenuta dalla A aggiungendo la colonna dei termini noti si chiama ***matrice completa***.

2. Risoluzione del sistema lineare: metodo della matrice inversa

Consideriamo il sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_x = b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Indichiamo con:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

la matrice incompleta e con:

$$\bar{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots\ldots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

il vettore colonna dei termini noti ed infine con:

$$\bar{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

il vettore colonna delle incognite. Il sistema (2) si può allora scrivere in forma compatta nel modo seguente:

$$A\,\overline{x} = \overline{b}$$

e se risulta $\det A \neq 0$, il sistema *ammette una ed una sola soluzione*. Dette soluzioni sono date dalla:

$$\overline{x} = A^{-1}\,\overline{b}\,.$$

Esempio
Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -11 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}.$$

Scriviamo il sistema sotto la *forma matriciale*. Si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Il determinante A della matrice incompleta (quella i cui elementi sono i coefficienti delle incognite) è:

$$\det A = 25 \neq 0$$

per cui il sistema ammette una ed una sola soluzione. Calcoliamo la matrice inversa A^{-1} di A. Scriviamo innanzitutto la trasposta di A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcoliamo i complementi algebrici di A. Si ha:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -5; & A_{12} = +5; & A_{13} = +5; \\ A_{21} = -10; & A_{22} = +5; & A_{23} = 0; \\ A_{31} = 0; & A_{32} = -10; & A_{33} = +5. \end{array}$$

Quindi per A^{-1} si ha:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

e perciò:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\cdot(-11)+\frac{1}{5}\cdot(-7)+\frac{1}{5}\cdot 6 \\ -\frac{2}{5}\cdot(-11)+\frac{1}{5}\cdot(-7)+\ 0\cdot 6 \\ 0\cdot 11\quad -\frac{2}{5}\cdot(-7)+\ \frac{1}{5}\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

La soluzione del sistema è pertanto:

$$x_1 = 2; \qquad x_2 = 3; \qquad x_4 = 4.$$

3. Risoluzione del sistema lineare: regola di Cramer

La ricerca dell'inversa di una matrice , soprattutto quando $n \geq 4$, richiede molto tempo, per cui si preferisce ricorrere ad altri metodi. I teoremi che seguono permettono di stabilire a priori quante sono le soluzioni di un sistema lineare senza doverle calcolare esplicitamente.

Consideriamo dapprima un sistema lineare di n equazioni in n incognite e sia A la matrice dei coefficienti (incompleta) ed indichiamo con A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con la colonna dei termini noti. Sussiste il seguente:

Teorema di Cramer. ***Un sistema lineare di n equazioni in n incognite, con matrice dei coefficienti diversa da zero, ammette una ed una sola soluzione costituita dalla n-pla:***

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ \ldots\ldots\ldots, \ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Fissiamo ora un generico sistema lineare nel quale la matrice dei coefficienti sia del tutto arbitraria ed accanto a questa la matrice completa. Sussiste il seguente:

Teorema di Rouchè-Capelli. ***Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di m equazioni in n incognite abbia soluzioni, è che le due matrici, incompleta e completa, abbiano lo stesso rango***.

Vediamo qualche esempio.

Esempio1 (sistema lineare $n \times n$)
Risoluzione del sistema lineare non omogeneo 3×3 (in generale $n \times n$).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = \dfrac{13}{2} \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

Sviluppando secondo gli elementi della seconda riga si trova che:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot 7 = -15$$

e quindi il sistema ha una sola soluzione. Risulta poi:

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} \frac{13}{2} & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{27}{2} = -30$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 2 & \frac{13}{2} & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - \frac{13}{2} \cdot (-5) - 1 \cdot \left(-\frac{17}{2} \right) = 45$$

$$\left|A_{x_3}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \frac{13}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\cdot\left(-\frac{27}{2}\right) - 3\cdot 7 = -\frac{15}{2}$$

pertanto la soluzione è:

$$x_1 = \frac{\left|A_{x_1}\right|}{|A|} = 2, \qquad x_2 = \frac{\left|A_{x2}\right|}{|A|} = -3, \qquad x_3 = \frac{\left|A_{x3}\right|}{|A|} = \frac{1}{2}.$$

Esempio 1° (sistema lineare 3×3)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}.$$

Si vede facilmente che la matrice incompleta, avendo determinante uguale a zero, ha rango 2; la matrice completa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

ha caratteristica 3. In base al teorema di Rouchè-Capelli possiamo dire che il sistema è incompatibile, cioè non ammette nessuna soluzione.

Esempio 2 (sistemi lineari *m*×*n*)

Consideriamo il sistema lineare del tipo ($m \times n$) la cui forma è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_x = b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Indichiamo con r il rango della matrice incompleta $A = \| a_{ij} \|$ che risulta essere rettangolare essendo *m* (numero delle righe) diverso da *n* (numero delle colonne). Ricordiamo che affinché il sistema ammetta soluzione deve esistere in A almeno un minore di ordine r con determinante non nullo e che r non può superare il $\min\{m, n\}$. Si possono verificare diverse situazioni che andremo man mano ad illustrare servendoci di esempi concreti.

a) Risoluzione del sistema lineare (3×4).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

È facile verificare che il determinante delle prime tre colonne è nullo perché la seconda e terza colonna sono proporzionali. Consideriamo allora quello formato dalla prima, seconda e quarta colonna. Risulta:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-6-1) + 2\cdot(2+3) = -11 \neq 0$$

quindi il rango della matrice incompleta è $r = 3$ ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni; per ottenerle risolviamo il sistema con la regola di Cramer.
Poiché la terza colonna (quella dei coefficienti di x_3) non fa parte della matrice A_3 e, posto $x_3 = k$, scriviamo il sistema nel modo seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 + 2k \\ 3x_1 + x_2 = -4 - 2k \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 11 + 4k \end{cases}$$

dal quale si ricavano i determinanti:

$$\left|A_{x_1}\right| = \begin{vmatrix} 5+2k & -1 & 3 \\ -4-2k & 1 & 0 \\ 11+4k & -2 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad \left|A_{x_2}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 5+2k & 3 \\ 3 & -4-2k & 0 \\ 1 & 11+4k & 2 \end{vmatrix} = 22k-65, \quad \left|A_{x_4}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5+2k \\ 3 & 1 & -4-2k \\ 1 & -2 & 11+4k \end{vmatrix} = 8$$

Le soluzioni del sistema sono quindi espresse da:

$$x_1 = \frac{\left|A_{x_1}\right|}{\left|A_3\right|} = \frac{7}{11}, \quad x_2 = \frac{\left|A_{x_2}\right|}{\left|A_3\right|} = \frac{65-22k}{11}, \quad x_3 = k, \quad x_4 = \frac{\left|A_{x_4}\right|}{\left|A_3\right|} = -\frac{8}{11}.$$

Poiché le soluzioni dipendono dal parametro k, ed a k possiamo assegnare infiniti valori, le soluzioni del sistema sono, appunto, ∞^1.

***b*) Risoluzione del sistema lineare (2×4).**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}.$$

La matrice incompleta è:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$$

ed essendo $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, il suo rango è $r = 2$ (numero delle equazioni, le colonne sono quelle delle incognite x_1 e x_2); il sistema pertanto ammette ∞^2 soluzioni che troviamo con la regola di Cramer dopo aver posto $x_3 = h$, $x_4 = k$ e scritto il sistema nella forma:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 - 4h + k \\ 3x_1 - x_2 = 6 - h - 5k \end{cases}.$$

Si hanno i determinanti:

$$\left| A_{x_1} \right| = \begin{vmatrix} 1-4h+\ \ k & -3 \\ 6-\ \ h-5k & -1 \end{vmatrix} = h - 16k + 17, \ \left| A_{x_2} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1-4h+\ \ k \\ 3 & 6-\ \ h-5k \end{vmatrix} = 10h - 13k\ 9.$$

Le ∞^2 soluzioni del sistema sono quindi espresse da:

$$x_1 = \frac{h - 16k + 17}{7}, \quad x_2 = \frac{10h - 13k + 9}{7}, \quad x_3 = h, \quad x_4 = k.$$

In generale possiamo dire che le soluzioni del sistema sono ∞^{n-r}.

***c*) Risoluzione del sistema lineare (3×2).**

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 4 \\ \ \ x + \ \ y = 5 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}.$$

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}$$

il cui rango è 2 (infatti il minore $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ è diverso da zero).

Calcoliamo ora il rango della matrice completa. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Anche la matrice completa ha rango 2 e pertanto, per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema è compatibile, ha una sola soluzione ed è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ \ \ x + y = 5 \end{cases}$$

la cui soluzione (dopo averlo risolto con la regola di Cramer) è: $x = 3$, $y = 2$.
Questa coppia di valori verifica anche la terza equazione. Infatti è:

$$4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad 6 = 6.$$