Sistemi lineari omogenei

Un sistema lineare in cui tutti i termini noti sono nulli, si dice ***lineare omogeneo***. Esso quindi è del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Il sistema omogeneo (in cui può essere sia $m = n$ che $m \neq n$) con determinate della matrice dei coefficienti diverso da zero, certamente certamente la soluzione:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots\ldots, \qquad x_n = 0.$$

Se una n-pla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ è soluzione del sistema, essa dicesi ***autosoluzione*** del sistema omogeneo, e si dimostra che anche la n-pla $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$ è autosoluzione del sistema, e quindi possiamo affermare che *se un sistema lineare omogeneo ha una autosoluzione, esso ne ha infinite ed esse differiscono tra loro per una costante arbitraria non nulla.*
Sussiste anche il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare omogeneo abbia soluzioni, è che la caratteristica r della matrice dei coefficienti (incompleta) delle equazioni del sistema sia minore del numero delle incognite.

Nel caso particolare che il sistema sia del tipo $n\times n$, dal teorema precedente si ricava che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare omogeneo di tipo n×n abbia autosoluzioni è che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti delle equazioni del sistema.

Esempio 1
Risolvere il sistema lineare omogeneo di tipo (4×3):

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ha sicuramente la soluzione (0, 0, 0). Per vedere se ammette autosoluzioni consideriamo la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$$

la cui caratteristica è $r = 3$. Infatti è uguale a -14, e quindi diverso da zero, il determinante del terzo ordine formato dalle prime tre righe. Essendo il rango uguale al numero delle incognite, il sistema non ammette autosoluzioni.

Esempio 2
Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ 15x_1 + 7x_2 - 11x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Il determinate del sistema è:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 \\ 9 & -5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 & -5 \\ 15 & 7 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi il sistema ammette autosoluzioni. Il minore:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 82 \neq 0$$

pertanto il sistema è equivalente al sistema di Cramer:

$$\begin{cases} +2x_2 - 5x_3 + x_4 = -7x_1 \\ -5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -9x_1 \\ -x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -4x_1 \end{cases}$$

Le soluzioni le troviamo con la regola di Cramer e sono:

$$x_1 = k; \qquad x_2 = 2k, \qquad x_3 = 3k, \qquad x_4 = 4k$$

essendo k un parametro reale.

Esempio 3
Risolvere il sistema lineare omogeneo di tipo (5×4)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 2t = 0 \\ x + 5y - 2z - 3t = 0 \\ 5x - y + t = 0 \\ 3x + 2y - z - t = 0 \\ x - 8y + 3z + 5t = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema è:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -8 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Lasci a voi verificare che questa matrice ha rango 2 essendo

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0.$$

Le autosoluzioni del sistema sono quindi ∞^2 ($n - r = 4 - 2 = 2$) che sono quelle del sistema formato dalle prime due equazioni. Posto $z = h$ e $t = k$ possiamo scrivere il sistema nel modo seguente:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -h - 2k \\ x + 5y = 2h + 3k \end{cases}$$

che, per il teorema di Cramer ha una sola soluzione (dipendente naturalmente dai due parametri h e k.
Essendo:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -h-2k & -3 \\ 2h+3k & 5 \end{vmatrix} = h - k$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -h-2k \\ 1 & 2h+3k \end{vmatrix} = 5h + 8k$$

si trovano le ∞^2 autosoluzioni espresse da:

$$x = \frac{h - k}{13}, \qquad y = \frac{5h + 8k}{13}, \qquad z = h, \qquad t = k.$$