

SOLUZIONI ESONERO PARZIALE2
MATEMATICA
C. L. STATISTICA

ESERCIZIO n°1:

Calcolare i seguenti integrali con il metodo di sostituzione o per parti:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx & \text{b)} \quad \int x\sqrt{1+x} dx & \text{c)} \quad \int \frac{dx}{1+e^x} \\ \text{d)} \quad \int x \log(1+x) dx & \text{e)} \quad \int x^2 e^x dx & \text{f)} \quad \int \log(1+x) dx \end{array}$$

SOLUZIONE

L'integrale a) si risolve per sostituzione; ponendo $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$ e quindi $dx = 2t dt$ si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx = \int \frac{1}{t+t^2} \cdot 2t dt = 2 \int t \frac{1}{t+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{t+1} dt = 2 \log|1+t| + c = 2 \log(1+\sqrt{x}) + c \quad \forall x > 0$$

L'integrale b) si risolve per sostituzione; ponendo $\sqrt{1+x} = t \Rightarrow 1+x = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$ e $dx = 2t dt$ si ha:

$$\int x\sqrt{1+x} dx = \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + c = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + c = \frac{2}{5\sqrt{(1+x)^5}} - \frac{2}{3\sqrt{(1+x)^3}} + c$$

L'integrale c) si risolve per sostituzione; ponendo $e^x = t \Rightarrow x = \log t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$ si ottiene:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt$$

Questo integrale si risolve applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)} = \frac{At + A + Bt}{t(t+1)} \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A=-B=-1 \end{cases}$$

quindi:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \quad \text{pertanto:}$$

$$\int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \log|t| - \log|t+1| + c = \log e^x - \log(e^x + 1) + c$$

ed essendo $\log e^x = x$

$$\log e^x - \log(e^x + 1) + c = x - \log(e^x + 1) + c$$

L'integrale d) si risolve per parti.

Ricordiamo che la formula dell'integrazione per parti è:

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ dove $f(x)$ è detto fattore finito e $g'(x)dx$ fattore differenziale.

Nel caso dell'integrale d) si può assumere come fattore finito

$f(x) = \log(1+x)$ e come fattore differenziale $g'(x)dx = xdx$ da cui:

$$f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f'(x)dx = \frac{1}{1+x} dx \quad \text{e} \quad g'(x)dx = xdx \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$$

Quindi:

$$\int x \log(1+x) dx = \frac{x^2}{2} \log|1+x| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx$$

L'ultimo integrale si risolve applicando la divisione tra polinomi, dalla quale risulta:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

e pertanto:

$$\frac{x^2}{2} \log|1+x| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \log|1+x| - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{x^2}{2} \log|1+x| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \log|1+x| + c$$

L'integrale e) si risolve per parti.

Considerando come fattore finito $f(x) = x^2$ e come fattore differenziale

$g'(x)dx = e^x dx$ e applicando la regola dell'integrazione per parti si ottiene:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x)dx = 2x dx \quad \text{e} \quad g'(x)dx = e^x dx \Rightarrow g(x) = e^x$$

Quindi

$$\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx \quad (*)$$

quest'ultimo integrale si risolve ancora per parti prendendo come fattore finito

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x)dx = dx \quad \text{e} \quad \text{come fattore differenziale} \quad g'(x)dx = e^x dx \Rightarrow g(x) = e^x$$

da cui dalla (*)

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \left(x \cdot e^x - \int e^x dx \right) = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + c$$

L'integrale f) si risolve per parti.

Se si considera come fattore finito $f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f'(x)dx = \frac{1}{1+x}dx$ e come fattore differenziale $g'(x)dx = dx \Rightarrow g(x) = x$ applicando la regola dell'integrazione per parti si ottiene:

$$\int \log(1+x)dx = x \cdot \log|1+x| - \int \frac{x}{1+x}dx$$

Quest'ultimo integrale si risolve con la divisione tra polinomi, pertanto risultando

$$\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

si avrà:

$$\int \log(1+x)dx = x \cdot \log|1+x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = x \cdot \log|1+x| - x + \log|1+x| + c.$$

ESERCIZIO n°2

Studiare la seguente funzione

$$y = x^3 - 3x$$

e disegnarne il grafico.

Determinare quindi i punti di intersezione della curva con la retta $y = x$ e calcolare la misura dell'area della parte di piano limitata dalla retta e dalla curva.

SOLUZIONE

Disegniamo il grafico della funzione data effettuandone lo studio:

$$y = x^3 - 3x$$

E' una funzione razionale intera continua e dispari quindi $\exists \forall x \in \mathbb{R}$ ed è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani O.

Non presenta *asintoti verticali* perché è *continua* nel suo insieme di definizione e non presenta asintoti orizzontali o obliqui risultando

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x) = \infty$$

Calcoliamo le intersezioni con gli assi:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}$$

quindi i punti di intersezione con gli assi sono:

$$O(0;0) \quad A(-\sqrt{3};0) \quad B(\sqrt{3};0)$$

Studiamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

La derivata prima risulta

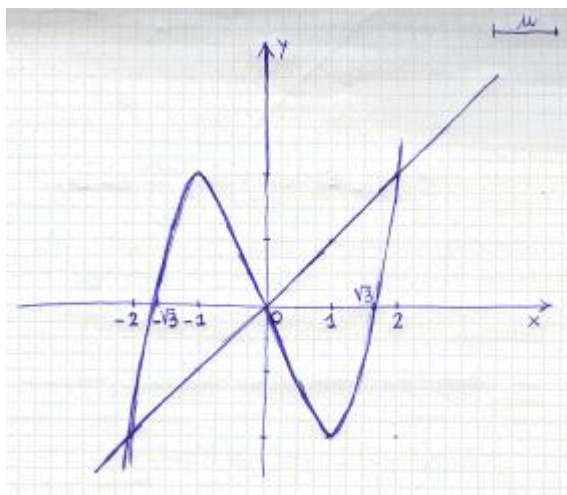
$$positiva \forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\quad \text{e} \quad negativa \forall x \in]-1; 1[$$

e quindi

la $f(x)$ cresce in $]-\infty; -1[\cup]+1; +\infty[$ e decrescente in $]-1; +1[$.

Nei punti $x=-1$ e $x=1$ la funzione presenta rispettivamente *un punto di minimo* e *un punto di massimo* che valgono $f(-1)=2$ e $f(+1)=-2$.

Il grafico della funzione è il seguente:



Per calcolare l'area della parte di piano richiesta, bisogna trovare i punti di intersezione tra la curva e la retta $y = x$

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x - x = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -2; x = +2$$

Quindi i punti di intersezione tra la curva e la retta sono : $O(0;0)$ $P(-2;-2)$ $Q(+2;+2)$

Allora, essendo la curva simmetrica rispetto ad O , l'area richiesta è data da:

$$2 \int_0^2 (x - x^3 + 3x) dx = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2(2 \cdot 4 - 4) = 2(8 - 4) = 8$$