RICERCA OPERATIVA

Angela GHIRALDINI

DEFINIZIONE

“ *Procedimento della scienza moderna di fronte ai complessi problemi di scelta che sorgono nella direzione dei grandi sistemi di uomini, macchine, materiale e denaro nell’industria, nel commercio, nel governo e nella difesa.*
L’atteggiamento distintivo è di sviluppare un modello scientifico del sistema, che includa misure di fattori quali il caso e il rischio, con il quale predire e confrontare politiche ed azioni.”

Formulata dalla OPERTIONS RESEARCH SOCIETY of AMERICA

Questa definizione fa riferimento a due concetti in particolare :

problematica delle scelte
modello logico matematico del problema

Il primo consente di riflettere su quanti e quanto vari siano gli ambiti in cui la R.O. può essere utilizzata e come possa fornire valido supporto ai “decisori” nelle molte fasi di un processo.
Infatti le tecniche e gli strumenti di R.O. sono di supporto in tutte le situazioni di gestione delle risorse, da quelle energetiche e tecnologiche a quelle economiche, infrastrutturali, sociali ed urbane, sia in fase di pianificazione strategica , sia in fase di programmazione applicativa.
In una qualsiasi “azienda”, le tecniche quantitative di supporto della R.O. sono applicabili nelle scelte di Marketing e Pianificazione, ma anche nelle fasi tattiche di Assegnazione delle risorse disponibili, in tutti i settori e ambiti.
Sono di aiuto, infatti, anche nella pianificazione degli Acquisti, della Produzione, della Vendita e nella gestione del Personale.

Il secondo è l’elemento distintivo dell’approccio della R.O.: la costruzione di un *modello formale,* sul quale simulare le conseguenze di differenti decisioni, riproducendo una situazione di gestione con molteplici possibilità di scelta.
Costruire un modello formale non è “impresa” facile, perché la realtà di governo di grandi sistemi è spesso caratterizzata da variabili non sempre misurabili, da incertezze, da tendenze, da sensibilità intuitivo-artistiche dei decisori che risultano difficili da tradurre in numeri e formule.

CENNI STORICI

Non è eccessivo affermare che la R.O. esiste da sempre, infatti dietro molti lavori o decisioni del passato, soprattutto in situazioni in cui bisognava risolvere complessi problemi di scelte strategico-militari, c'erano metodologie di R.O., anche se non ancora codificate e formalizzate.

La nascita ufficiale della R.O. viene fatta coincidere con la costituzione di un gruppo interdisciplinare di studio, il Circolo BLACKETT, istituito nel 1940 presso la R.A.F. inglese.

Guidato dal Prof. Blackett, della Università di Manchester, il gruppo era costituito da fisici, matematici, fisiologi e ufficiali dell'esercito ed aveva il compito di studiare i problemi strategici, sia di offesa che di difesa.
In seguito ai risultati positivi ottenuti da questo primo gruppo, ne nacquero altri, presso altre istituzioni (marina e aeronautica degli USA).

Una volta terminata la guerra , gli esperti del gruppo di R.O. vennero impiegati presso imprese pubbliche e private, consentendo le prime applicazioni della R.O. a problemi di decisione nella gestione aziendale.
In Inghilterra la R.O. civile conservò l'attenzione agli aspetti multidisciplinari e umani del lavoro di gruppo, come nei progetti iniziali
Negli USA, al contrario, l'approccio fu più formale ed analitico, volendo specializzare il ricercatore operativo su basi matematico-statistiche.
In Italia, le prime applicazioni si ebbero alla fine degli anni '50 nelle multinazionali e nelle imprese pubbliche.

FASI DI UNO STUDIO DI RICERCA OPERATIVA

Partendo dal presupposto che la R.O. affronta problemi di decisione, cioè di scelta tra due o più possibilità di azione, in base ad uno o più criteri di valutazione, vediamo ora quali sono le fasi di uno studio di R.O.

1) INDIVIDUAZIONE DEL PROBLEMA
2) RACCOLTA DATI
3) COSTRUZIONE DEL MODELLO RAPPRESENTATIVO
4) DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE
5) MESSA A PUNTO E COLLAUDO DEL MODELLO E DELLA SOLUZIONE
6) INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI E RELAZIONE AI DECISORI

La prima fase, INDIVIDUAZIONE DEL PROBLEMA, potrebbe essere considerata banale, in realtà spesso risulta essere la più onerosa in termini di sforzi, tempi, costi, sia a causa della complessità del contesto in cui il problema è immenso, sia per le difficoltà che l’analista di R.O. può incontrare nello scambio informativo con i committenti e l’utenza.
Solo a fronte di una buona analisi della realtà è possibile realizzare una corretta modellizzazione del problema.

Bisogna quindi descrivere il problema evidenziando i fattori sui quale verte la scelta e le alternative possibili, esplicitando gli obiettivi, esprimendoli numericamente.

- FISSAZIONE OBIETTIVI e CRITERI DECISIONALI
- INDIVIDUAZIONE SPAZIO DELLA SOLUZIONE
- SVILUPPO DELL’AMBIENTE
- FORMULAZIONE DELLE ALTERNATIE DI DECISIONE

La seconda fase, RACCOLTA DATI, consiste nell’acquisire i “numeri”, cioè nello scoprire i valori che quantificano tutte le variabili del problema, sia quelle endogene (cioè direttamente coinvolte), sia quelle esogene (quelle relative al contesto in cui il problema e inserito).

La terza fase, COSTRUZIONE MODELLO RAPPRESENTATIVO, è quella in cui si procede alla realizzazione della rappresentazione idealizzata della realtà mediante relazioni e simboli matematici.
Essendo il modello la rappresentazione della realtà, la scelta delle relazioni , dei simboli, degli strumenti matematici, varia di volta in volta a seconda dei vincoli e delle interdipendenze che intercorrono tra le variabili in gioco.

Le componenti fondamentali del MODELLO, in un problema di scelta, generalmente sono:

VARIABILI D'AZIONE
FUNZIONE OBIETTIVO
VINCOLI

Le VARIABILI D'AZIONE (op. DI DECISIONE) sono delle vere e proprie variabili che rappresentano le n grandezze, relative al problema, i cui n valori costituiranno la soluzione.

La FUNZIONE OBIETTIVO (op. F. UTILITA', op. F. ECONOMICA) è una funzione che rappresenta la misura composta della efficacia delle variabili d'azione

I VINCOLI, che generalmente vengono espressi mediante equazioni e/o disequazioni, rappresentano le limitazioni di valore che possono/devono essere assegnate alle variabili d'azione.
L'insieme delle limitazioni espresse dai vincoli è detto "sistema dei vincoli".
Se il sistema dei vincoli non ha soluzioni, anche il problema non ha soluzione.
Se invece il sistema ammette soluzioni, l'insieme dei valori delle variabili d'azione che soddisfano contemporaneamente tutti i vincoli viene detto CAMPO DI SCELTA (op. AREA AMMISSIBILE), ed è in questo insieme che viene individuata la ennupla della soluzione.

Quindi un problema di scelta può essere così sintetizzato:

determinare i valori delle variabili di azione che rendono ottima (minima/massima) la funzione obiettivo, sotto le condizioni espresse dai vincoli.

La quarta fase consiste nella RICERCA DELLA SOLUZIONE.
Il termine “ricerca” non è usato a caso, infatti spesso i problemi reali e i contesti in cui vengono affrontati sono di tale complessità (sia in termini di numero di variabili, sia in termini di numero di vincoli e interconnessione tra essi) che la soluzione ottima non può essere trovata, oppure il valutarla risulta eccessivamente oneroso (in termini di tempi, costi, coinvolgimenti,…..).
Si procede quindi con la individuazione, tra le tante possibili, della soluzione ottimale, cioè di quella soluzione che sia contemporaneamente non troppo distante dalla soluzione ottima, né troppo costosa da ottenere.

La quinta fase, MESSA A PUNTO E COLLAUDO DEL MODELLO E DELLA SOLUZIONE, è spesso una fase “informatica”, ma può anche essere “manuale”.
Si procede con la progettazione delle operazioni necessarie alla individuazione della soluzione e, in caso di informatizzazione, con la realizzazione dell’algoritmo e del software relativi da implementare anche più volte, con input (i valori delle variabili d’azione) diversi, fino al raggiungimento dell’obiettivo, la soluzione ottima, cioè di quella n-pla di valori relativi alle n variabili d’azione che fanno sì che la funzione obiettivo assuma il valore desiderato nel rispetto dei vincoli imposti dal contesto.

I valori ottimali trovati migliorano il funzionamento del sistema solo se il modello è una buona rappresentazione del sistema.
Quindi la corrispondenza del modello alla realtà deve essere verificata e la soluzione deve essere valutata, cioè bisogna confrontare il suo “effetto” con la politica o la procedura che deve andare a supportare.
Quindi si rende necessario un criterio di valutazione che ovviamente dipende dal problema e dal contesto (costi, esigenze, tempi,….) e quindi, spesso, varia anche a parità di problema.

Sicuramente, comunque, un buon analista di R.O. deve assicurarsi che:
- non ci siano errori banali e omissioni nella rappresentazione matematica delle variabili e dei vincoli
- che le espressioni matematiche siano dimensionalmente coerenti con le unità di misura reali
- fare più prove variando i parametri di input per controllare se l’output vari in modo plausibile

Spesso il modello costruito verrà utilizzato più volte nel tempo, quindi è plausibile che i valori delle variabili non controllate, o addirittura la struttura del sistema, cambi da una utilizzazione all'altra.
Bisogna quindi essere in grado di individuare questi cambiamenti per fare in modo che la soluzione sia ogni volta adeguata.

La sesta fase, INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI E RELAZIONE AI DECISORI, spesso viene eseguita in maniera non adeguatamente accurata.
Il lavoro relativo alle fasi precedenti è effettuato dagli analisti di R.O., ma una volta concluso deve essere "consegnato" ai committenti che, nella maggioranza dei casi, non sono dei tecnici.
La fase di rilascio è spesso delicata, difficile e strategica (come la prima) e, se mal eseguita, può inficiare o, addirittura, annullare tutto il lavoro svolto.
Le difficoltà sono nascoste nelle differenze di linguaggio, punti di vista, scala di valori, che esistono necessariamente tra le due parti.
Sta all'analista di R.O. "adeguarsi", cioè riuscire ad interpretare i bisogni/voleri del decisore committente, ma anche saper esporre le caratteristiche del modello e della soluzione che produce, le implicazioni e le conseguenze che comporterebbe assumerla.

DECISIONI

Da quanto detto, in sostanza, la R.O. consiste nella creazione di modelli razionali per la rappresentazione, più realistica possibile, di fenomeni economici allo scopo di mettere gli interessati (ricercatori, direzioni aziendali, clienti, operatori,…..) in condizioni di operare delle decisioni ragionevoli.

Relativamente alle decisioni possono distinguersi due aspetti della teoria:

DECISIONI IN CONDIZIONI DI CERTEZZA

Quando si è a conoscenza della situazione e dei dati di partenza (costi dei prodotti, prezzi, consumi, valori della domanda o dell'offerta, durata delle

macchine o degli impianti) e si possono prevedere le conseguenze delle possibili decisioni.
In questo ambito il metodo utilizzato è la PROGRAMMAZIONE LINEARE, o altri metodi che valutano gli estremi di una funzione a più variabili, sottoposta a vincoli.

DECISIONI IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

Quando, al contrario, non si è a conoscenza della situazione e/o dei dati e quindi le conseguenze della decisione si possono solo prevedere.
In questo ambito vengono utilizzati dei metodi specifici della R.O..

In entrambe le situazioni esiste un altro parametro decisionale da tenere presente: il tempo di realizzazione delle conseguenze.

Si hanno così:

DECISIONI CON EFFETTI IMMEDIATI

DECISIONI CON EFFETTI DIFFERITI NEL TEMPO.

PROGRAMMAZIONE LINEARE

Ricordiamo che un problema di scelta può essere così sintetizzato:

determinare i valori delle variabili di azione che rendono ottima la funzione obiettivo sotto le condizioni espresse dai vincoli

Ricordiamo inoltre che la FUNZIONE OBIETTIVO rappresenta la quantità da ottimizzare, da rendere cioè massima o minima a seconda del problema in esame, e che le VARIABILI D'AZIONE sono le quantità a disposizione il cui valore è da scegliere per realizzare lo scopo di ottimizzazione, ed, infine, che i VINCOLI sono la rappresentazione dei condizionamenti a cui sono assoggettate le variabili del problema.

Viene comunemente chiamato PROGRAMMAZIONE LINEARE il procedimento di ricerca dell'ottimo di una funzione obiettivo allorquando questa sia esprimibile LINEARMENTE e i valori ammissibili soddisfino anch'essi UGUAGLIANZE e DISUGUAGLIANZE LINEARI.

IMPOSTAZIONE MATEMATICA DI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Vediamo ora come si procede nella impostazione matematica di un problema quando sono verificate le condizioni perché questo sia risolvibile con un procedimento di P.L..

Siano

$x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots\ldots, x_n$ le n VARIABILI D'AZIONE individuate.

Esse possono assumere solo valori non negativi, quindi

$$(1) \qquad x_1 \geq 0 \;,\quad x_2 \geq 0 \;,\quad x_3 \geq 0 \;, \ldots\ldots, \quad x_n \geq 0$$

esse devono inoltre soddisfare le n CONDIZIONI (VINCOLI) rappresentate dalle seguenti disequazioni lineari

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n \leq b_n \end{cases}$$

che costituiscono un sistema lineare, detto SISTEMA DEI VINCOLI.

Gli *m* x *n* numeri $a_{11}, a_{12}, ..., a_{ij}, ..., a_{nm}$ e gli *m* valori $b_1, b_2, ..., b_m$ sono dei DATI COSTANTI relativi al problema.
Nel caso in cui il/i vincolo/i siano esprimibili con delle disequazioni di verso "maggiore di", la/e disequazione/i corrispondenti vanno ricondotte al caso "minore di" moltiplicandone entrambe i membri per (-1).

La FUNZIONE OBIETTIVO è data dalla funzione lineare

(3) $$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + ... + c_n x_n$$

dove i coefficienti $c_1, c_2, ..., c_n$ sono quantità note, positive, nulle o negative, purchè risulti

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + ... + c_n^2 \neq 0 .$$

Concludendo, un problema di P.L. consiste nel rendere MASSIMA/MINIMA la funzione (3) le cui variabili siano condizionate dalle (1) e (2).

Risulta quindi essere un *problema di massimo/minimo vincolato con funzione e vincoli lineari.*

INSIEME DOMINIO E INSIEME SOLUZIONE NEI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Diamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 1

Si chiama DOMINIO DEI VALORI AMMISSIBILI del problema di P.L. l'insieme D di tutti i valori possibili $x_1, x_2, ..., x_n$ per i quali le disuguaglianze date nelle (1) e (2) risultano vere.

DEFINIZIONE 2

L'insieme dei valori $x_1, x_2, ..., x_n$ contenuti nel dominio ammissibile D, per i quali la Funzione obiettivo (3) assume minimo o massimo, si chiama insieme SOLUZIONE del problema di P.L..
Il problema di P.L. è detto RISOLUBILE se esiste almeno una soluzione, cioè se l'insieme soluzione risulta essere non vuoto.

Dalla DEFINIZIONE 1 si evince che una SOLUZIONE NON NEGATIVA del sistema (2) è un insieme ordinato di *n* numeri, tutti non negativi, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ tali che, ponendo nelle disequazioni del (2)

$$x_1 = \beta_1 \quad , \quad x_2 = \beta_2 \quad , \quad x_3 = \beta_3 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad x_n = \beta_n$$

esse risultino tutte soddisfatte.

Il dominio ammissibile D è ovviamente il dominio di definizione della funzione (3).

Anticipiamo che il DOMINIO AMMISSIBILE, di un problema di P.L. a due o più variabili, è un POLIGONO, oppure un'AREA ILLIMITATA, ma può anche essere un INSIEME VUOTO, qualora le (1) e (2) siano incompatibili.

OSSERVAZIONE

Nel caso in cui, nell'impostare il sistema dei vincoli, oltre a delle disequazioni lineari si ottenessero delle equazioni lineari, ci si può ricondurre al caso di sole disequazioni procedendo nel modo seguente:

si risolve l'equazione ottenuta rispetto ad una delle sue incognite e si sostituisce a questa incognita il valore trovato in tutte le altre relazioni vincolari e nella funzione obiettivo.

In questo modo il numero delle variabili d'azione viene diminuito di tante unità quante sono le equazioni vincolari eliminate.

Perché il problema di P.L. sia risolvibile, è ovvio, che il numero di equazioni vincolari deve essere necessariamente minore del numero delle variabili d'azione che rappresentano il problema.

Un problema di P.L. a due o tre variabili può essere risolto, oltre che algebricamente, anche con un metodo chiamato METODO GRAFICO.

Le fasi di risoluzione di un problema di P.L. mediante tale metodo sono:

- INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE
- COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI
- TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI
- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI
- INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA
- RICERCA DEL VERTICE O PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO
- CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE

Prima di procedere con l'esposizione del metodo grafico può risultare utile fare alcuni richiami.

RICHIAMI

Vengono qui richiamati alcuni concetti sulle disequazioni a 2 o 3 variabili e sulla localizzazione dei massimi o minimi delle funzioni lineari a 1,2 o 3 variabili, considerati in poligoni o poliedri convessi.
Tali concetti sono utilizzati in alcune fasi del metodo grafico.

Ogni equazione del tipo $ax+by+c = 0$ rappresenta una retta del piano e come tale lo divide in due semipiani rappresentati dalle disequazioni

$$ax+by+c \geq 0 \qquad \text{e} \qquad ax+by+c \leq 0$$

Ma la $ax+by+c = 0$ è anche una funzione lineare a due variabili

$$f(x,y) = ax+by+c$$

e il suo valore dipende dal punto $P(x,y)$ in cui viene calcolata.
Il punto di coordinate (a,b), con a e b coefficienti delle variabili x e y della funzione $f(x,y)$, risulta appartenere al semipiano in cui la $f(x,y) \geq 0$.

Il segmento con origine in (0,0) ed estremo in (a,b) è perpendicolare alla f(x,y) = ax+by+c ed è orientato secondo il verso di crescita della f(x,y) stessa.

La soluzione di sistemi di disequazioni lineari a 2 o 3 incognite coincide con quella parte di piano comune ai semipiani individuati dalle singole disequazioni.
Questa regione del piano può essere limitata o illimitata.
Nel caso le disequazioni del sistema non hanno soluzioni comuni, cioè i semipiani non si intersecano, il sistema è detto IMPOSSIBILE.

Richiamiamo ora alcune definizioni:

DEFINIZIONE 1

Una figura si dice CONVESSA quando, detti A e B due suoi punti qualunque, il segmento che li ha come estremi è completamente incluso nella figura stessa.

DEFINIZIONE 2

La circonferenza in un cerchio e il perimetro in un poligono si chiamano FRONTIERA della figura stessa.

DEFINIZIONE 3

Si chiama SEMIPIANO DI APPOGGIO di una figura convessa ogni semipiano che contenga tutta la figura e che abbia almeno un punto, della sua retta frontiera, in comune con la frontiera della figura.

Data una figura convessa e limitata ed un fascio di rette parallele ad una retta data, comunque orientata, esistono sempre due rette del fascio che risultano essere frontiera di due semipiani di appoggio della figura e che individuano una striscia di piano (intersezione dei due semipiani) che contiene la figura.
Tale striscia risulta essere la minima tra le strisce ad essa parallele e contenenti la figura.

Sia ax+by+c = 0 la retta generatrice del fascio di rette parallele e sia f(x,y) la funzione ad essa corrispondente.
Si può dimostrare che le due rette del fascio, frontiere dei due semipiani di appoggio della figura, corrispondono ai valori che sono, l’uno il massimo l’altro il minimo, di quelli assunti dalla f(x,y) all’interno della figura convessa.

Per sapere quale dei due sia il minimo e quale il massimo, basta applicare il procedimento del segmento orientato alla f(x,y) = ax+by+c ed individuare il semipiano in cui essa è crescente e quello in cui è decrescente.

Queste considerazioni geometriche permettono di capire che:

- il minimo ed il massimo di f(x,y) vengono assunti solo sulla frontiera della figura convessa
- il minimo e il massimo di f(x,y) possono coincidere con un vertice della figura convessa o con un tratto rettilineo della sua frontiera.

Le ultime considerazioni sono valide per ogni funzione associata a un fascio di rette parallele e per ogni figura convessa e se ne deduce un teorema relativo alle funzioni obiettivo di un problema di P.L..

TEOREMA 1

La funzione obiettivo z = f(x,y) = ax+by+c di un problema di P.L. assume il suo valore massimo/minimo solo su un vertice o su tutti i punti di un lato della frontiera di quella parte di piano convessa che rappresenta il campo di scelta individuato dal sistema di vincoli.

METODO GRAFICO

Torniamo ora ad illustrare le fasi del METODO GRAFICO.

La prima fase, INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE, consiste nell'individuare e nominare le variabili descrittive del problema, come già visto nelle fasi 1 e 3 dello studio di RICERCA OPERATIVA, e nella impostazione matematica di un problema di PROGRAMMAZIONE LINEARE.

La seconda fase, COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI, consiste nello schematizzare in una tabella tutti i dati acquisiti (fase 2 dello studio di R.O.) relativi alle variabili d'azione e descrittivi dei condizionamenti relativi al contesto.

La terza fase, TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI, consiste nella scrittura delle m disequazioni (relative agli m condizionamenti), combinazioni lineari delle variabili e dei dati ad esse associati, che insieme costituiscono il sistema dei vincoli (si veda impostazione matematica di un problema di P.L.).

La quarta fase, RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI, è la prima delle fasi peculiari del metodo grafico.
Per ogni disequazione del sistema dei vincoli bisogna individuare il semipiano che la risolve.

Si procede quindi con la quinta fase, INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA, delineando l'intersezione di tutti i semipiani relativi alle disequazioni del sistema dei vincoli.
Essa è una parte di piano convessa, compresa nel primo quadrante, limitata o no, ed è il DOMINIO DEI VALORI AMMISSIBILI del problema, cioè l'insieme di tutte le n-ple di valori possibili per i quali le disuguaglianze del sistema risultano verificate.
La figura così individuata viene chiamata CAMPO DI SCELTA o AREA AMMISSIBILE.

Nella sesta fase, RICERCA DEL VERTICE O DELLE PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO, viene tracciata la retta relativa alla funzione obiettivo $z=ax+by+c$ e il segmento, ad essa perpendicolare, di estremi $(0,0)$ e (a,b) che consente di individuare il semipiano in cui la funzione obiettivo è crescente e, quindi, quello in cui è decrescente.
Si procede quindi con l'individuazione del punto o dei punti della frontiera del campo di scelta che è/sono la soluzione ottimale della funzione obiettivo secondo il TEOREMA 1.
Se il problema richiede un massimizzazione si prenderanno gli estremi della frontiera contenuta nel semipiano positivo per la $f(x,y)$, viceversa, se quella chiesta dal problema è una minimizzazione, la soluzione sarà nella frontiera contenuta nel semipiano negativo per la $f(x,y)$.

L'ultima fase, CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE, è una fase aritmetica, consiste infatti nel sostituire le coordinate del vertice, individuato nella fase precedente, nella $f(x,y)$ per ottenere il profitto massimo o il costo minimo richiesto dal problema.
Nel caso la soluzione individuata nella fase precedente sia un lato del campo di scelta le possibili scelte, cioè le soluzioni ottimali, sono infinite, almeno teoricamente, tutte equivalenti tra loro.

OSSERVAZIONE 1

Nel caso a=b=0 segue che z=0, quindi la funzione obiettivo assume sempre lo stesso valore c (costante) e tale valore risulta essere, ovviamente, anche massimo e minimo della funzione stessa.

OSSERVAZIONE 2

Può accadere che le variabili del problema siano tali che nella realtà possono assumere solo valori interi (es. persone), mentre i punti ottimali, individuati con il metodo grafico, abbiano coordinate non intere.
In questo caso si procede cercando il punto di coordinate intere, sempre all'interno del campo di scelta, che risulti più vicino al punto ottimale teorico individuato dal metodo.
Il campo di scelta reale risulta quindi essere un sottoinsieme del campo di scelta teorico, sottoinsieme costituito dai punti con coordinate intere.

Abbiamo visto come il METODO GRAFICO sia utile perché consente di visualizzare i vincoli e la/e soluzione/i sul piano cartesiano, ma può essere utilizzato solo per problemi con due variabili o riconducibili a due variabili.
Per problemi in cui le variabili non possono essere riconducibili a due si utilizza il METODO ALGEBRICO, anche questo metodo, comunque, non è praticabile se il numero delle variabili è molto alto.

METODO DEL SIMPLESSO

Per risolvere problemi di P.L. ad n variabili, con $n>2$, si utilizza un metodo più generale, chiamato METODO DEL SIMPLESSO.
Il M. del S., messo a punto nel 1947 da G.B. Dantzig, è un metodo iterativo che, a partire da una soluzione del sistema dei vincoli, iterando più volte una serie di passaggi di calcolo, permette di ottenere la soluzione ottima, quando questa esiste.
Le fasi in cui è articolato, che vanno iterate fino al raggiungimento della soluzione, costituiscono un algoritmo standard, implementabile anche in caso di problemi che presentano migliaia di vincoli e decine di migliaia di variabili.

Per illustrare il procedimento si rendono necessarie alcune definizioni:

DEFINIZIONE 1
Vengono dette VARIABILI AGGIUNTIVE (o di SCARTO) le variabili ausiliarie x_{n+1}, x_{n+2}, … , x_{n+m} , non negative, che vengono aggiunte, una per ogni disequazione, in un sistema di *m* vincoli in *n* variabili.

DEFINIZIONE 2
Un sistema di *m* vincoli in *n* variabili è detto in FORMA NORMALE (o CANONICA) quando ogni disequazione è stata trasformata in equazione ed è stata aggiunta al suo interno una variabile aggiuntiva.

Il sistema dei vincoli in forma normale risulta quindi essere costituito da *m* equazioni ed *n+m* incognite non negative:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + x_{m+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + x_{m+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m \end{cases}$$

Indicando con
- X il vettore colonna delle incognite
- C_i il vettore dei coefficienti delle incognite nella funzione obbiettivo
- A la matrice (*n* x *n+m*) dei coefficienti del sistema dei vincoli canonico
- B il vettore colonna dei termini noti

il problema di P.L. si può esprimere in notazione matriciale come segue:

ottimizzare : $z = C_i * X$ sotto il vincolo : $AX = B$ (con $x_j >= 0$)

Richiamiamo ora alcune nozioni necessarie:

DEFINIZIONE
Si chiama MINORE di ORDINE *p*, estratto da una matrice A, un qualunque determinante d'ordine *p*, ottenuto con gli elementi comuni a *p* righe e *p* colonne della matrice A.

DEFINIZIONE
Si chiama RANGO (o CARATTERISTICA) di una matrice A, non nulla, l'ordine massimo dei suoi minori non nulli.

TEOREMA di Rouché – Capelli
Un sistema di equazioni lineari ammette soluzioni (una o infinite) se e solo se la matrice incompleta e quella completa del sistema hanno lo stesso rango.

In tal caso il sistema è detto compatibile.

Quindi, il problema di P.L., ha soluzione solo se il rango della matrice completa e quello della matrice incompleta, del sistema dei vincoli in forma canonica, risultano essere uguali.

Riprendiamo ad introdurre altri concetti specifici del Metodo del Simplesso :

DEFINIZIONE 3
Una soluzione del sistema dei vincoli in forma canonica è detta SOLUZIONE AMMISSIBILE (o DI BASE) quando almeno *n* delle *n*+*m* incognite hanno valore nullo, ed almeno una delle rimanenti sia non negativa.

Cioè la soluzione è DI BASE se risulta:
- essere soluzione del sistema dei vincoli in forma canonica
- *n* delle x_i , della *n*+m-pla, sono nulle
- almeno una, delle rimanenti *m* x_i della *n*+m-pla, è non negativa

TEOREMA
Se un problema di P.L. ammette soluzioni ottimali fra queste c'è sempre una soluzione di base del problema stesso.

Questo teorema fornisce una condizione necessaria e quindi suggerisce una strada teorica per individuare una soluzione ottimale: cercare tra le possibili soluzioni di base del sistema dei vincoli in forma canonica.

Infatti soluzione ottimale de problema di P.L. in questione sarà ogni soluzione di base, del suo sistema di vincoli in forma canonica, che "ottimizzi" la funzione obiettivo del problema.

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per procedere con la trattazione del

METODO DEL SIMPLESSO

Partendo dal sistema dei vincoli dedotto dalle indicazioni fornite dall'analisi del problema, lo si trasforma nel sistema dei vincoli equivalente in forma canonica, aggiungendo ad ogni disequazione una variabile aggiuntiva e trasformando le disequazioni in equazioni

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

si ottiene quindi il sistema di equazioni lineari :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + x_{m+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n + x_{m+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m \end{cases}$$

L'obbiettivo è ora diventato : trovare quel punto, di coordinate $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+m})$, che tra tutti i punti di coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ dello spazio a *n+m* dimensioni, ottimizzi la funzione lineare $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$.
Una volta trovato il punto ottimizzante $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+m})$, la soluzione del problema iniziale risulta essere il sottoinsieme $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ della $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+m})$, come asserito nell'ultimo Teorema riportato.

E' evidente come non è possibile sapere in partenza quali siano le *n,* tra le x_i variabili della soluzione di base, che hanno valore nullo, si procede quindi "per tentativi", iterando più volte, fino a quando l'ipotesi di soluzione risulta essere quella esatta.

Questo procedimento sistematico è "l'idea" che c'è alla base del Metodo del Simplesso.

Viene di seguito riportata la traccia teorica, del procedimento del Metodo del Simplesso, relativa ad un problema che è stato modellizzato ed è rappresentato da una funzione obiettivo e da quattro variabili e tre condizioni di vincolo

FASE 1 : COSTRUZIONE DELLA TABELLA

Una volta ottenuto il sistema di equazioni lineari equivalente al sistema dei vincoli del problema si procede con la costruzione di una tabella relativa ai coefficienti delle variabili e ai termini noti.

$C_{(i)}$	$A_{(i)}$		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	B
0	A_5		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	b_1
0	A_6		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	b_2
0	A_7		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	b_3

Nelle iterazioni successive della prima fase, il contenuto della tabella risulterà diverso, in funzione di quanto è avvenuto nelle fasi successive.

In coda alla tabella vengono aggiunte delle righe come segue

$C_{(i)}$	$A_{(i)}$		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	B
0	A_5		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	b_1
0	A_6		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	b_2
0	A_7		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	b_3

c_k	c_1	c_2	c_3	c_4	0	0	0
Sol.	0	0	0	0	b_1	b_2	b_3

- la riga contrassegnata con c_k contiene i coefficienti delle variabili della funzione obiettivo
- ogni volta che la FASE 1 viene iterata la soluzione di base va scritta nella riga contrassegnata da “sol”, riportando i valori dei termini noti in corrispondenza delle variabili che presentano colonne di 0 e 1, nell’ordine dato dagli 1
- la colonna contrassegnata da $A_{(i)}$, ad ogni iterazione, contiene in ogni riga le variabili A_i che hanno coefficiente 1 in quella riga
- la colonna contrassegnata da $C_{(i)}$, ad ogni iterazione, contiene i coefficienti c_k delle variabili inserite nella colonna $A_{(i)}$.

FASE 2 : VERIFICA DELLA OTTIMALITA' DELLA SOLUZIONE

In questa seconda fase si effettua un verifica numerica circa la ottimalità della soluzione di base individuata nella fase precedente.
In caso di esito positivo il processo iterativo ha termine e la soluzione di base attuale è la soluzione del problema, mentre, in caso di esito negativo, si prosegue con le fasi successive ed un ulteriore iterazione del procedimento.

Per ogni variabile, che presenta valore nullo nella soluzione di base, si calcola il seguente valore

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, c_{(i)}$$

Se Δ_k **< 0** per ogni $c_k = 0$ la soluzione di base attuale è la soluzione unica e ottima del problema

se Δ_k **=< 0** per ogni $c_k = 0$ la soluzione di base attuale è la soluzione ottima del problema e non si può migliorare

se Δ_k **> 0** per almeno una $c_k=0$ la soluzione di base attuale non è ottimale e bisogna continuare con il procedimento

nel caso si verifichi la terza condizione si procede aggiungendo in coda alla tabella attuale una riga contenente i valori Δ_k ottenuti

$C_{(i)}$	$A_{(i)}$		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	B
0	A_5		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	b_1
0	A_6		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	b_2
0	A_7		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	b_3

c_k	c_1	c_2	c_3	c_4	0	0	0
Sol.	0	0	0	0	b_1	b_2	b_3
Δ_k	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	/	/	/

FASE 3 : INDIVIDUAZIONE DELLA VARIABILE ENTRANTE E DELLA VARIABILE USCENTE

Tra le variabili in gioco, sono definibili VARIABILI ENTRANTI quelle che:

- hanno valore $c_k = 0$ nella tabella attuale
- hanno $\Delta_k > 0$
- hanno almeno un coefficiente $a_{ik} > 0$

Per proseguire con il procedimento è possibile scegliere una qualsiasi tra queste, ma è dimostrato che, se si sceglie quella che presenta il valore Δ_k maggiore, saranno necessarie un minor numero di iterazioni del procedimento per l'individuazione della soluzione ottima.

Per individuare la VARIABILE USCENTE è necessario calcolare, per tutte le variabili che presentano valori non nulli nella soluzione di base attuale, i rapporti

$$\frac{b_i}{a_{ie}}$$

dove l'indice della colonna è fisso ed è quello relativo alla variabile entrante appena individuata

La variabile uscente è quella per cui si è ottenuto il rapporto di valore minore tra i positivi.
La variabile uscente è necessariamente una di quelle già inserite nella colonna $A_{(i)}$.

$C_{(i)}$	$A_{(i)}$		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	B
0	A_5		a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	b_1
0	A_6		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	b_2
0	A_7		a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	b_3

c_k	c_1	c_2	c_3	c_4	0	0	0
Sol.	0	0	0	0	b_1	b_2	b_3
Δ_k	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	/	/	/
b_i/a_{ie}	/	/	/	/	b_1/a_{1e}	b_2/a_{2e}	b_3/a_{3e}

E' evidente come la variabile entrante prenderà, nella successiva iterazione del procedimento, il posto della variabile uscente nella colonna $A_{(i)}$ della tabella nelle fasi relative alla successiva iterazione, il suo valore c_k quello del c_k uscente nella colonna $C_{(k)}$.

Indicando con "$_e$" l'indice della variabile entrante e con "$_u$" quello della variabile uscente, l'elemento a_{ue}, della tabella attuale, viene detto PIVOT e gioca un ruolo fondamentale nel passaggio tra l'iterazione del procedimento ancora in corso e la successiva.

FASE 4 : PREPARAZIONE DELLA NUOVA TABELLA

Quest'ultima fase (dell'iterazione in corso) del procedimento è la fase preparatoria alla FASE 1 dell'iterazione successiva.

Per riempire la tabella di riferimento della successiva iterazione bisogna :

- dividere ogni elemento della u-esima riga (la riga del pivot) per il pivot e scrivere i valori ottenuti nelle stesse posizioni della nuova tabella
- sottrarre ad ogni riga della "vecchia" tabella un multiplo della "nuova" u-esima riga (elemento per elemento), multiplo scelto opportunamente in modo da ottenere, dopo la sottrazione, in ogni nuova riga, valore nullo per l'elemento della "nuova" e-sima colonna (la colonna del pivot).

La tabella così ottenuta presenterà nella colonna in cui era stato individuato il pivot tutti valori nulli tranne uno nella posizione che era del pivot stesso. Il ruolo che era della variabile uscente sarà preso dalla variabile entrante.

Le fasi illustrate andranno ripetute fino a quando, nella fase 2, non si verifichino la prima o la seconda condizione illustrate relativamente al Δ_k , in tal caso il procedimento ha termine e la soluzione di base in corso è da ritenersi la soluzione del problema in questione.
I valori di tale soluzione, sostituiti alle variabili della funzione obiettivo ne forniranno il valore ottimizzato.

Nella trattazione del M. del S. fatta fin'ora, per rappresentare i vincoli, sono state utilizzate sempre disequazioni di verso "$\leq$" (standard), ma nella realtà le condizioni relative ad un problema da modellizzare possono richiedere anche condizioni di uguaglianza o di disuguaglianza di verso opposto.

VARIANTI AL METODO DEL SIMPLESSO

Quelli di seguito esposti sono degli adattamenti, che devono essere apportati al procedimento già illustrato, in caso si presentino delle condizioni diverse da quelle standard.

PROBLEMI DI MINIMIZZAZIONE

Nel caso in cui il problema di P.L. richieda di minimizzare la funzione obiettivo si può procedere in due modi :

- si sceglie, in ogni iterazione del procedimento, come variabile entrante quella che risulti far decrescere la funzione obiettivo, cioè la variabile per cui si ottiene il valore di Δ_k più piccolo, procedendo in maniera opposta rispetto a quanto visto in caso di massimizzazione
- si decide di massimizzare la funzione obbiettivo opposta rispetto a quella fornita nel problema di partenza, quindi, se *z* è la funzione da minimizzare, si procede come già illustrato, massimizzando la funzione *–z,* ricordando di cambiare i segni a tutti i coefficienti delle variabili x_i ,i valori ottenuti nella soluzione finale vanno sostituiti alle variabili della funzione obiettivo –z , il valore ottenuto risulta essere il valore opposto del valore che minimizza la funzione obiettivo iniziale.

EQUAZIONI NEL SISTEMA DEI VINCOLI

Se il sistema dei vincoli che rappresenta le condizioni del problema di P.L. contiene una o più equazioni, relativamente ad esse non è necessario aggiungere le variabili aggiuntive, come nel caso delle disequazioni standard (infatti le variabili aggiuntive erano necessarie proprio per trasformare le disequazioni in equazioni).
L'assenza delle variabili aggiuntive comporta che non è possibile determinare, nella FASE 1 della prima iterazione del procedimento, la soluzione di base (ammissibile).

Si procede, in maniera alternativa, introducendo, in ogni equazione presente nel sistema, una VARIABILE ARTIFICIALE.
Il ruolo delle variabili artificiali è lo stesso di quello delle variabili aggiuntive, permettono di individuare la prima soluzione di base del procedimento, ma, diversamente dalle variabili aggiuntive devono essere inserite anche nella funzione obiettivo, cambiandola rispetto alla formulazione iniziale.
Tutte le variabili artificiali introdotte nelle equazioni del sistema devono essere aggiunte alla funzione *z* con un coefficiente "*M*" avente le seguenti caratteristiche :

- valore assoluto "molto" grande
- segno positivo, se la *z* è da minimizzare
- segno negativo, se la *z* è da massimizzare

Nel caso si stia procedendo manualmente il valore da attribuire a *M* è del tutto formale, si vedrà infatti che nel giro di qualche iterazione le variabili artificiali scompaiono e con loro i coefficienti *M*, nel caso invece si stia implementando il metodo su calcolatore un valore opportuno per gli *M* è dell'ordine di 10^6.

L'aggiunta delle variabili artificiali, con i coefficienti *M,* alla funzione obbiettivo ha lo scopo di "neutralizzare" l'effetto che le stesse variabili hanno sul sistema dei vincoli. Infatti il sistema dei vincoli in cui sono state aggiunte le variabili artificiali non è equivalente a quello iniziale, in quanto le variabili risultano aggiunte solo alle equazioni e non in tutti i vincoli.

DISEQUAZIONI DI VERSO OPPOSTO

Se il sistema dei vincoli del problema di P.L. contiene una o più disequazioni di verso opposto a quello standard, è possibile renderle standard moltiplicando ogni loro termine per (-1) e invertendone il verso.
Il sistema di vincoli così ottenuto risulta essere equivalente a quello iniziale, ma, quanto fatto, introduce spesso valori non positivi nei termini noti b_j .
I valori non positivi delle b_j compariranno anche nella soluzione di base, già nella prima iterazione del procedimento, in contraddizione alla condizione di non negatività, richiesta dal metodo, per le x_i della funzione obiettivo.
Per ovviare si procede introducendo, nel primo membro di ogni disequazione avente $b_i < 0$, una variabile artificiale con coefficiente (-1).
Questo accorgimento consente di ottenere una soluzione di base (ammissibile) che viene detta SOLUZIONE FITTIZIA.

Come già detto, per il caso di equazioni nel sistema dei vincoli, le variabili artificiali introdotte nelle disequazioni aventi termine noto negativo devono essere inserite anche nella funzione obiettivo, con coefficienti *M* aventi le caratteristiche già illustrate.

Quest'ultima variante al M. del S. va fatta anche quando il verso della disequazione è quello standard, ma il termine noto è comunque negativo.