

Osservazioni e varianti del modello di Klein della geometria iperbolica

Franco Eugeni¹, Daniela Tondini²

Sunto: Scopo del presente lavoro, in parte compilativo, è di ricostruire come, a partire dagli assiomi di Hilbert e dalla sistemazione rigorosa della geometria euclidea, si possa pervenire anche ad altri tipi di geometrie, come le non-euclidee in senso classico ed anche le geometrie finite. Sarà infatti riportato, in appendice, un nostro lavoro nel quale verrà trattato, nel caso discreto, l'analogo del modello di Klein.

Parole chiave: Postulato delle parallele

1. La definizione implicita degli enti fondamentali

Scopo del presente paragrafo e dei successivi 2. e 3. è di presentare, in forma divulgativa, l'assetto logico della geometria, attraverso la cosiddetta *scienza delle figure*. Si tratta quindi di un'unità didattica su questo argomento.

¹ Dipartimento M.E.T., Università di Teramo, e-mail: eugenif@tin.it

² Dipartimento M.E.T., Università di Teramo, e-mail: dtondini@yahoo.it

Sia S un insieme astratto non vuoto di oggetti che indicheremo con lettere latine maiuscole:

$$S = \{A, B, C, \dots\}$$

ed R una famiglia propria e non vuota di sottoinsiemi di S :

$$R = \{\{A, B, C, \dots\}, \{H, K, L, \dots\}, \{X, Y, Z, \dots\}, \dots\}$$

Definizione 1.1. Ogni elemento di S è detto *punto*, mentre ogni elemento di R si chiama *blocco* oppure *retta*.

Definizione 1.2. La coppia (S, R) prende il nome di *spazio geometrico*.

2. Il problema dell'indipendenza dei postulati

Definizione 2.1. Dato un sistema assiomatico definito dai postulati $P_1, P_2, \dots, P_n$ si dice che il postulato P_n è *dipendente* dagli altri se, supposti veri i rimanenti $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, il postulato P_n è dimostrabile a partire da essi e dalle loro composizioni.

Definizione 2.2. Uno spazio geometrico (S, R) è detto *piano euclideo* se soddisfa i seguenti gruppi di assiomi, meglio conosciuti con il nome di *assiomi di Hilbert*:

- I. *Assiomi di appartenenza*
- II. *Assiomi di ordinamento*
- III. *Assiomi di congruenza*
- IV. *Assioma di continuità*
- V. *Assioma delle parallele*

I. Assiomi di appartenenza

- I.a** Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
- I.b** Ogni retta ha almeno due punti; esistono tre punti non su una retta.
- I.c** Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.
- I.d** Se due punti di una retta sono su di un piano allora anche la retta si trova nel piano.
- I.e** Se un punto appartiene a due piani distinti allora i piani hanno almeno un secondo punto in comune.
- I.f** Esistono quattro punti non su di un piano.

II. Assiomi di ordinamento

- II.a** Su ogni retta sono date due relazioni d'ordine totali, una l'inversa dell'altra dette *precedere* e *seguire* ($\Rightarrow$ "stare fra").
- II.b** Dati due punti distinti $A \neq B$ esiste almeno un C ($C \neq A, C \neq B$) che precede uno e segue l'altro ($\Rightarrow$ "segmenti")
- II.c** Dati tre punti su una retta uno "sta fra" gli altri due.
- II.d** Se una retta incontra un lato di un triangolo deve incontrare necessariamente un secondo lato.

III. Assiomi di congruenza

Definizione 2.3. Indichiamo con S l'insieme dei *segmenti*.

Definizione 2.4. Indichiamo con Ω l'insieme degli *angoli*.

- III.a** In S è data una relazione di equivalenza detta eguaglianza di segmenti.
- III.b** In Ω è data una relazione di equivalenza detta eguaglianza di angoli.

- III.c** Dati un segmento $[AB]$ ed una semiretta di origine H esiste nella semiretta un punto K tale che:
 $[HK] = [AB]$
- III.d** Dati un angolo $[ab]$ ed un fascio di origine h esiste nel fascio una retta k tale che:
 $[hk] = [ab]$
- III.e** $[AB] = [BA]$
- III.f** $[ab] = [ba]$
- III.g** Dati due triangoli ABC , $A'B'C'$ tali che $[AB] = [A'B']$, $[BC] = [B'C']$ e $\text{ang}B = \text{ang}B'$ allora i due triangoli sono eguali.

Osservazione 1.

I postulati del *movimento* si possono anche esprimere nel seguente modo:

- 1) I movimenti sono particolari corrispondenze biunivoche del piano che formano un gruppo.
- 2) In un movimento ad una retta corrisponde ordinatamente una retta, cioè l'ordine dei punti viene conservato.
- 3) Siano dati nel piano un punto A ed una retta r passante per A ; sia inoltre a una delle due semirette di r uscenti da A ed α uno dei due semipiani del piano π separati da r ; dati similmente un secondo punto A' , una seconda retta r' ed in relazione ad r' una semiretta a' , uscente da A' , ed un secondo semipiano α' separato da r' , esiste uno ed un solo movimento che porta A in A' , a in a' e α in α' .
- 4) Se un movimento muta una semiretta in se stessa, allora muta in se stesso anche ogni punto della semiretta.

IV. **Assioma di continuità**

IV.a Su ogni retta classi contigue di segmenti hanno un elemento separatore (*assioma di Cantor*).

IV.b Dati due segmenti esiste un multiplo dell'uno che supera l'altro (*assioma di Archimede*).

V. **Assioma delle parallele**

V.a Dati una retta ed un punto che non si appartengono esiste nel piano che li contiene una sola retta per il punto non avente punti in comune con la retta data (*assioma di Euclide o delle parallele*).

Ci si porrà ora, nel presente contesto, il seguente problema.

Il postulato delle parallele è indipendente dagli altri? Esiste, cioè, un modello di enti che soddisfa al gruppo dei postulati **I–IV** e non al postulato **V**?

Ricordiamo, a tal proposito, cosa scrive Campedelli in [12] cercando di mediare tra un discorso logico–formale ed un aspetto maggiormente intuitivo.

* * *

Considerati i postulati euclidei dell'appartenenza, dell'ordine e dei movimenti, il postulato delle parallele è indipendente o no da essi, cioè è una conseguenza logica oppure no dei precedenti? (QUESTIONE DELLE PARALLELE)

Per dimostrare che un postulato P è indipendente da altri postulati S la via maestra da seguire, e sulla quale ci si soffermerà nel seguito, è quella di costruire degli enti che, pur soddisfacendo i postulati S , non soddisfino il postulato P .

I postulati, dunque, se da un lato assumono il compito di definire implicitamente gli enti fondamentali, dall'altro devono indicare le loro principali proprietà elementari, punto di partenza per successive indagini e deduzioni, riferite non soltanto agli enti primitivi, ma anche a quei loro vari raggruppamenti che si chiamano "figure".

Definizione 1. Una figura è l'insieme di più enti fondamentali (in numero finito o infinito), collegati tra loro in modo conveniente.

Basti pensare, ad esempio, al triangolo definito come una figura costituita da tre punti, non allineati, A, B, C e dai segmenti AB, BC, CA , oppure alla circonferenza come luogo di punti.

Risulta ora necessario introdurre il famoso simbolismo matematico che, insieme al particolare linguaggio utilizzato e alle formule delle quali ci si serve, desta enorme preoccupazione nei profani e riluttanza in tutti coloro che cercano di avvicinarsi alla nostra scienza, senza pensare, almeno inizialmente, che anche la Matematica, come ogni scienza, ha bisogno di un proprio modo di espressione, sinonimo di precisione e di chiarezza.

Sia, pertanto, α l'insieme dei postulati posti alla base della nostra geometria e $\Sigma(\alpha)$ la totalità delle proprietà ("teoremi") deducibili dai postulati α , cioè il sistema ipotetico-deduttivo costruito sopra α , ovvero la geometria relativa ai postulati α .

Ma allora come sono stati scelti i postulati di cui si sente tanto parlare?

Com'è ben noto ci si trova di fronte a quella geometria nata dall'osservazione e dall'esperienza, studiata sin dai primi anni della scuola media superiore e denominata "elementare", anche se motivi storici consigliano di chiamare geometria euclidea, essendo stata trattata inizialmente proprio nei famosi "Elementi" di Euclide. Si è passati, così, dalla costruzione delle figure geometriche, sulla base di oggetti materiali e modelli concreti, ad un'immagine astratta della realtà stessa, riuscendo il matematico subito a riconoscere alcune proprietà generali delle figure di cui si occupa, anche delle più elementari (punti, rette, piani, ...), supportato soprattutto dall'osservazione, dall'esperienza e dall'intuizione.

Definizione 2. *Le prime proprietà, esplicitamente formulate in termini della più larga generalità ("due punti determinano una ed una sola retta", "tre punti individuano un piano", etc.), costituiscono i postulati.*

Definizione 3. *Le proprietà più complesse e riposte, possedute da una particolare figura geometrica e deducibili logicamente, ovvero "dimostrabili" a partire dai postulati, costituiscono i teoremi.*

Definizione 4. *L'insieme dei teoremi rappresenta la nostra geometria, fondata, a sua volta, sugli assiomi sopra riportati.*

* * *

Occorre ora sottolineare come, in base alle particolari scelte dei postulati di cui sopra, ci si possa trovare di fronte a vari tipi di geometria:

- *geometrie non-euclidee*: tradizionalmente sono quelle per le quali valgono tutti i postulati euclidei con la sola esclusione di quello delle parallele;

- *geometrie non-archimedee*: tradizionalmente sono quelle per le quali valgono tutti i postulati euclidei con la sola esclusione di quello di Eudosso ed Archimede;
- *geometrie finite affini* per le quali valgono i postulati di appartenenza e delle parallele con l'esclusione dei postulati di ordinamento sostituiti dal postulato secondo cui su ogni retta esiste un numero finito di punti.

Nel passato, del resto, furono compiuti vari tentativi nel cercare di dimostrare l'assioma delle parallele come se fosse un vero e proprio teorema, sulla scorta degli altri postulati. Tale dimostrazione, però, non poteva esistere poiché, come si provò successivamente, il postulato delle parallele era indipendente. Negando quindi tale postulato ci si trovò di fronte alle seguenti due alternative.

- E) *Da P non esce nessuna retta parallela alla retta data r , ovvero ogni retta per P , complanare con r , la incontra in un punto (a distanza finita).*
- I) *Da P escono due rette parallele alla retta r data.*

Definizione 2.5. Le geometrie non-euclidee, ottenute sostituendo il postulato di Euclide con E ed I , sono dette rispettivamente *geometria ellittica* e *geometria iperbolica*. La comune geometria, ovvero quella che soddisfa il postulato delle parallele, prende anche il nome di *geometria parabolica*.

In particolare risulta possibile osservare marginalmente, come si può dimostrare, che:

- *nella geometria euclidea (parabolica) la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 2π ;*
- *nella geometria non-euclidea di tipo ellittico la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 2π ;*
- *nella geometria non-euclidea di tipo iperbolico la somma degli angoli di un triangolo è minore di 2π .*

Sorge allora naturale il dubbio proprio su questa idea. Ci si pone, cioè, la questione se l'origine delle geometrie non-euclidee sia una conseguenza del puro pensiero matematico o di necessità pervenute dal mondo della fisica. Gli scriventi sono convinti che la Matematica

sia un frutto del pensiero umano e, in quanto tale, caratterizzata dalla nostra ansia di conoscere e dalle nostre scelte, non certamente bizzarre e fantasiose, ma guidate sempre da ragioni, di carattere storico, critico o scientifico, anche in sinergia con discipline applicate, al fine di approfondire, in modo critico, il significato delle idee. Il processo dell'indagine matematica, quindi, rivelerebbe anche l'espressione di una fantasia "sui generis", corroborata dal fascino e dalle suggestioni della logica.

3. I Modelli della Geometria Euclidea

Con il presente paragrafo si intende dare un'idea intuitiva di due tipi di modelli: quello della geometria piana ellittica, del quale non ci si occuperà, e quello della geometria piana iperbolica sul quale, invece, ci si soffermerà maggiormente.

1. La Sfera come "Modello" della Geometria Ellittica Piana

A partire da una superficie sferica Φ , è possibile introdurre il seguente spazio geometrico.

Definizione 3.1. Si definisce Φ -punto ogni coppia, non ordinata, di punti diametralmente opposti su Φ . L'insieme di tali Φ -punti costituisce S .

Definizione 3.2. Si chiamano Φ -rette la totalità dei Φ -punti che, come coppia, sono in uno stesso cerchio massimo di Φ . Si denota con R l'insieme di tutte le Φ -rette.

Per lo spazio (S, R) risulta ora facile verificare la validità dei postulati sui quali si fonda la *geometria ellittica piana* e che converrebbe riformulare in modo equivalente ma più significativo. E' quindi possibile assumere lo spazio (S, R) come *modello del piano non-euclideo di tipo ellittico*. A riguardo, infatti, è sufficiente osservare, ad esempio, che due Φ -punti di S determinano una

Φ –retta, così come in R due Φ –rette hanno sempre un Φ –punto in comune. In altre parole, cioè, due coppie (non ordinate) di punti di Φ si trovano su un cerchio massimo e due cerchi massimi si incontrano in due punti diametralmente opposti.

2. Il Cerchio di Klein come Modello della Geometria Iperbolica Piana

Sia dato, nel piano ordinario $\mathbb{R}^2$, un cerchio Γ (inteso come insieme dei punti del piano aventi distanza dal centro non superiore al raggio). Si ponga ora la seguente:

Definizione 3.3. Si chiamano k –punti (*propri*) quelli interni a Γ ; si chiamano k –punti *impropri* quelli appartenenti a Γ ; ancora si chiamano k –punti *ideali* quelli esterni a Γ . L'insieme dei k –punti propri si denota con S .

Definizione 3.4. Si definiscono k –rette le corde di Γ pensate come insieme dei suoi k –punti propri. Il loro insieme si denota con C .

La coppia (S, C) si chiama *modello di Klein della geometria iperbolica*.

Definizione 3.5. Si dice che due k –rette sono:

- *parallele* se, come corde di Γ , hanno in comune un punto improprio;
- *incidenti* se, come corde di Γ , si incontrano in un punto proprio;
- *non secanti* nel caso in cui, come corde di Γ , si tagliano in un punto ideale.

Se, pertanto, si considerano, nel piano ordinario, solamente i k –punti propri, ovvero quelli interni a Γ , allora risulta facile constatare che da ogni k –punto escono esattamente due k –rette parallele alla k –retta data: ci si trova di fronte, quindi, almeno per quel che concerne il parallelismo, all'ipotesi non–euclidea di tipo iperbolico.

Inoltre è abbastanza facile verificare gli assiomi euclidei della geometria non-euclidea iperbolica assumendo come k -movimenti le omografie piane che mutano il cerchio Γ in sé.

4. Il Modello di Klein numerico piano

Un modello di geometria piana può essere costruito assumendo $S = \mathbb{R}^2$ e fissando come "rette" i luoghi dei punti di S soddisfacenti un'equazione del tipo:

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \text{ e } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Denotato con R l'insieme di tali rette, si verifica facilmente che la coppia (S, R) soddisfa tutti gli assiomi euclidei. Per il caso euclideo poi è stato provato che gli assiomi sono *categorici*, cioè che tutti i suoi modelli sono isomorfi, così che (S, R) è l'unico modello possibile.

Analogamente si costruiscono i modelli di $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$.

Ci si accinge ora a presentare un analogo numerico per il piano di Klein prima introdotto. Iniziamo con la seguente:

Definizione 4.1. Sia $\mathbb{R}^2$ il ben noto modello di geometria euclidea dedotto dal piano cartesiano. Definiamo k -punti le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

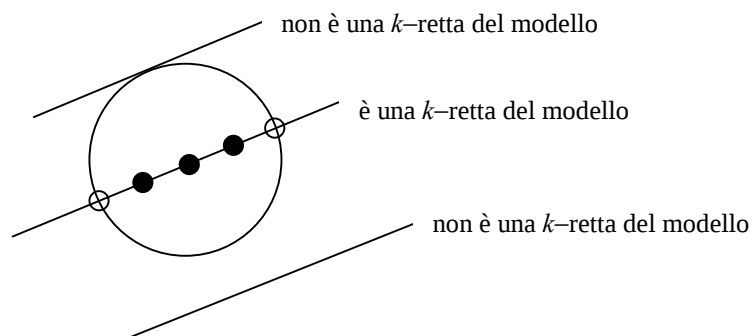
$$x^2 + y^2 < 1$$

(Intuitivamente è possibile pensare i k -punti del modello come i punti interni alla circonferenza Γ di centro l'origine e raggio unitario, quindi di equazione $x^2 + y^2 = 1$).

Definizione 4.2. Definiamo k -rette (*proprie*) gli insiemi delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ ax + by + c = 0 \\ (a, b) \neq (0, 0) \\ c^2 < a^2 + b^2 \end{cases}$$

(Intuitivamente è possibile pensare le k -rette del modello come le corde definite, all'interno del cerchio in esame, dalle rette secanti).



Definizione 4.3. I punti all'infinito delle k -rette sono due, esattamente le coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Poiché, com'è ben noto, un'omografia è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases}$$

se si suppone ora che una data omografia muti la circonferenza $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ in sé, allora risulta:

$$\begin{aligned} & (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + c_1)^2 + (a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi + c_2)^2 = \\ & = (a_3 \cos \varphi + b_3 \sin \varphi + c_3)^2 \quad \forall \varphi \in \square \end{aligned}$$

da cui seguono le sei condizioni:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 0 \\ a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0 \\ a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3 = 0 \end{cases}$$

E' quindi ora facile verificare che i coefficienti delle seguenti (1) soddisfano le sei condizioni sopra indicate (cfr. Villa, [12]):

$$\begin{cases} x' = \frac{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)x + 2(bd - ac)y + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \\ y' = \frac{2(cd - ab)x + 2(ad + bc)y - 2ab - 2cd}{(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \end{cases} \quad (1)$$

con a, b, c costanti reali e $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Osservazioni.

- a) I movimenti definiti dalle (1) sono omografie che mutano la circonferenza Γ , di equazione $x^2 + y^2 = 1$, in sé.
- b) Ciascun k -movimento, come omografia, non solo muta la circonferenza Γ in se stessa, ma muta anche punti interni a Γ in punti interni a Γ . Infatti sussiste l'identità (cfr. Villa, [12]):

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{\Delta^2 (x^2 + y^2 - 1)}{\left[(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \right]^2}$$

(2)

Inoltre i punti interni a Γ hanno coordinate (x, y) con $x^2 + y^2 - 1 < 0$ e, per la (2), $x'^2 + y'^2 - 1 < 0$ è vero se e solo se risulta $x'^2 + y'^2 - 1 < 0$. Ne segue che a punti interni a Γ corrispondono ancora punti interni a Γ .

Verifichiamo infine che gli enti sopra introdotti soddisfino ai postulati euclidei con eccezione del postulato delle parallele.

Poiché la validità dei postulati dell'appartenenza e dell'ordine può essere constatata attraverso verifiche analitiche o verifiche dirette sul modello di Klein non numerico, ci si occuperà ora dei postulati del movimento.

- I. Si osservi, innanzitutto, che i nostri movimenti, rappresentati dalle (1), formano senz'altro un gruppo. A riguardo, è sufficiente verificare, infatti, le seguenti due condizioni:
 - a) esiste l'inversa di una qualunque trasformazione ed essa appartiene ancora al gruppo;
 - b) il prodotto di due sue qualsiasi trasformazioni appartiene ancora al gruppo.

Sia, quindi, γ un'omografia rappresentata da:

$$\gamma: \begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases}$$

con:

$$\begin{cases} a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} & \text{per } i=1, 2, 3 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$$

Risulta allora possibile ricavare le incognite x ed y in funzione di x' ed y' ottenendo le equazioni dell'omografia inversa di γ .

Verifichiamo ora che il prodotto di due omografie è ancora un'omografia.

Siano γ_1 e γ_2 due omografie rappresentate da:

$$\gamma_1: \begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x'' = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1}{a'_3x' + b'_3y' + c'_3} \\ y'' = \frac{a'_2x' + b'_2y' + c'_2}{a'_3x' + b'_3y' + c'_3} \end{cases} \quad (4)$$

La corrispondenza prodotto, quindi, sarà rappresentata da:

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 : \begin{cases} x'' = \frac{a_1' \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b_1' \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c_1'}{a_3' \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b_3' \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c_3'} \\ y'' = \frac{a_2' \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b_2' \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c_2'}{a_3' \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b_3' \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c_3'} \end{cases} \quad (5)$$

che non sono altro che le equazioni di un'omografia che muta ancora la conica in sé. I movimenti, dunque, formano un gruppo.

Per la verifica degli altri assiomi ci si ponga in Π^2 .

- II. Il secondo postulato dei movimenti è soddisfatto in quanto se un punto C di una retta si trova tra due punti A e B appartenenti sempre alla medesima retta, allora, se A', B', C' , sono i corrispondenti punti di A, B, C , in virtù dell'omografia γ , ne segue che anche C' si trova tra A' e B' (l'omografia γ muta la conica data in sé).
- III. Per verificare il terzo postulato bisogna provare che, dati nel piano un punto A , una retta r per A e su r una semiretta a uscente da A e nel piano un semipiano σ e similmente A', r', a', σ' , esiste uno ed un solo movimento tale che:

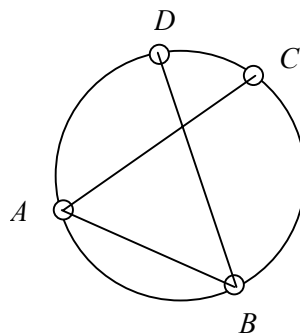
$$\begin{cases} A \rightarrow A' \\ a \rightarrow a' \\ \sigma \rightarrow \sigma' \end{cases}$$

Si osservi, in primo luogo, che se nel piano π introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , con O centro della circonferenza, e se indichiamo con x' ed y' le

coordinate cartesiane di un punto in un secondo piano π' , l'omografia γ è rappresentata dalle (1), avendo considerato nei due piani il medesimo riferimento cartesiano.

- IV. Il quarto postulato, come il secondo, è banalmente soddisfatto poiché, se un movimento muta una semiretta in se stessa, allora esso muta anche ogni suo punto in se stesso, trattandosi sempre di un'omografia.

Resta quindi da verificare la non validità del postulato delle parallele. Sia, pertanto, AB una retta r del modello. Allora, dato un punto $P \notin r$ ed interno alla conica, esistono infinite rette parallele ad r e passanti per P . E' sufficiente, a riguardo, come mostrato dalla seguente figura, considerare tutte le rette aventi un estremo sull'arco $\overline{AD}$ e l'altro estremo sull'arco $\overline{BC}$ (ovviamente i punti A, B, C, D non appartengono al modello).



5. Il Modello di Klein numerico spaziale

Si analizzerà ora un analogo modello numerico in $\mathbb{R}^3$, iniziando con la seguente:

Definizione 5.1. Sia $\mathbb{R}^3$ il modello di spazio euclideo reale. Definiamo k -punti le terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che:

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

(Intuitivamente è possibile pensare i k -punti come i punti interni alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

Definizione 5.2. Definiamo k -piani gli insiemi delle terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ ax + by + cz + d = 0 \\ (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \\ d^2 < a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

(Intuitivamente è possibile pensare i k -piani del modello come la parte di punti interni dei piani secanti la sfera).

Definizione 5.3. Definiamo k -rette le intersezioni di due k -piani non paralleli. Una k -retta, pertanto, avrà equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$$

essendo $\vec{D} = (l, m, n)$ il vettore direttore della retta r .

Posto ora $\vec{X} = (x, y, z)$ ed $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, la retta si può scrivere, in forma compatta, come $\vec{X} = \vec{D}t + \vec{X}_0$.

Osservazione. La condizione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ si può tradurre nella seguente:

$$\min \left\{ (lt + x_0)^2 + (mt + y_0)^2 + (nt + z_0)^2 \right\} < 1 \quad (*)$$

Nello spazio, quindi, l'equazione di un generico piano π per l'origine ed ortogonale ad r ha equazione $lx + my + nz = 0$ ovvero $\vec{D} \cdot \vec{X} = 0$. Il punto di intersezione $r \cap \pi$ si determina dall'equazione $D^2 t + \vec{D} \cdot \vec{X}_0 = 0$ da cui si ottiene il seguente valore di t da sostituire poi nelle equazioni della retta:

$$t = -\frac{\vec{D} \cdot \vec{X}_0}{D^2}$$

Si noti anche che la condizione $\vec{D} \cdot \vec{X} = 0$ è la stessa che fornisce il valore t per il quale si raggiunge il minimo nella (*), come si può subito verificare derivando, rispetto a t , l'equazione:

$$F(t) = (lt + x_0)^2 + (mt + y_0)^2 + (nt + z_0)^2$$

Segue dunque che:

$$\min F(t) = \left| -\frac{(\vec{D} \cdot \vec{X}_0) \vec{D}}{D^2} + \vec{X}_0 \right| = \frac{1}{D^2} \left| D^2 \vec{X}_0 - (\vec{D} \cdot \vec{X}_0) \vec{D} \right| < 1$$

ovvero:

$$\left| D^2 \vec{X}_0 - (\vec{D} \cdot \vec{X}_0) \vec{D} \right| < D^2$$

condizione soddisfatta quando, ad esempio, $\vec{X}_0$ è interno alla sfera.

Sulla base delle premesse sopra riportate risulta, quindi, facile verificare gli assiomi di appartenenza e di ordinamento mentre, al momento, non sembra altrettanto facile la determinazione delle omografie spaziali che mutano la sfera in sé ed è questo il modo con il quale terminiamo la presente rassegna.

6. Geometrie finite

L'assiomatica del piano euclideo, allora che ci si riconduca ai soli assiomi di appartenenza e di parallelismo, si può riassumere nella forma seguente.

Una coppia (A, B) si chiama *piano affine* se per esso valgono i seguenti assiomi:

A₁) per due punti distinti passa una ed una sola retta;

A₂) esistono tre punti non allineati;

A₃) dati una retta ed un punto che non si appartengono esiste una ed una sola retta per il punto che non sia incidente la data.

Se poi si richiede anche il seguente assioma:

A₄) esiste una retta che contiene un numero finito n di punti;

allora si dimostra che:

1. ogni retta ha n punti;

2. per un punto passano $n + 1$ rette;

3. il piano contiene n^2 punti;

4. nel piano ci sono $n^2 + n$ rette.

La struttura che così nasce è una struttura di *piano affine finito ordinario*.

Una vasta classe di tali piani e dei loro ampliamenti proiettivi è rappresentata da quelli aventi coordinate su un campo di Galois. Ed è proprio in relazione ai piani proiettivi di Galois che nel prossimo paragrafo verranno costruiti dei modelli di geometrie di Klein discrete ed analoghe, ma non troppo, a quelle reali.

7. Il modello discreto di Klein: il caso di ordine dispari

Sia $\underline{P} = PG(2, q)$ un piano proiettivo sul campo finito $GF(q)$, con $q = p^n$ potenza di un primo p dispari. Il caso pari non è stato trattato completamente e alcuni tentativi in questa direzione appaiono in [6]. E' ben noto che:

a) $\underline{P}$ contiene $q^2 + q + 1$ punti;

- b) $\underline{P}$ contiene $q^2 + q + 1$ rette;
- c) ogni retta contiene $q + 1$ punti;
- d) esattamente $q + 1$ rette passano per un punto fissato.

Si fissi ora in $\underline{P}$ una conica non degenera C e si supponga che l'ordine q di $\underline{P}$ sia dispari.

Definizione 7.1. Si dice che un punto $x \notin C$ è un punto *esterno* se esistono esattamente due rette per x tangenti a C .

Definizione 7.2. Si dice che un punto $x \notin C$ è un punto *interno* se non è esterno.

Ricordiamo inoltre che:

- I. Esistono esattamente $\binom{q}{2}$ punti interni rispetto alla conica C .
- II. Esistono esattamente $\binom{q+1}{2}$ punti esterni rispetto alla conica C .

Del resto sappiamo che:

- III. Ogni retta l secante C contiene $\frac{(q-1)}{2}$ punti interni, $\frac{(q-1)}{2}$ punti esterni e due punti su C .
- IV. Ogni retta l esterna a C contiene $\frac{(q+1)}{2}$ punti interni e $\frac{(q+1)}{2}$ punti esterni rispetto a C .

Si fissi ora in $\underline{P} = PG(2, q)$, q dispari, un sistema di coordinate omogenee e si supponga che C abbia la seguente forma canonica:

$$F(X) = F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 x_0 = 0$$

E' ben noto allora che, rispetto alla suddetta forma canonica, un punto $Y = (y_0, y_1, y_2)$ è esterno o interno a seconda che $F(Y)$ sia rispettivamente un quadrato o un non quadrato.

Definizione 7.3. Il sottoinsieme $\square \subset GF(q)$ è definito da:

$$\square = \{y : y \in GF(q) \text{ and } y = x^2 \text{ for some } x \in GF(q)\}$$

Se definiamo $\boxtimes := \underline{P} \setminus \square$, allora il sottoinsieme $\square$ è un sottogruppo moltiplicativo per il quale sussiste la seguente struttura:

$\bullet$	$\square$	$\boxtimes$
$\square$	$\square$	$\boxtimes$
$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\square$

8. Il modello discreto di Klein

Si definisca ora la seguente struttura d'incidenza $K = K_q = (\hat{C}, \hat{L})$

dove $\hat{C}$ è l'insieme dei punti interni di C ed $\hat{L}$ è la famiglia degli insiemi $\hat{l} \cap \hat{C}$ dove $\hat{l} \in \hat{L}$ è una retta che non è tangente a C .
Risulta così:

$$|\hat{l} \cap \hat{C}| = \frac{(q-1)}{2} \text{ o } \frac{(q+1)}{2}$$

a seconda che $\hat{l}$ sia rispettivamente secante o meno C .

Definizione 8.1. Un elemento $\hat{l} \in \hat{L}$ è detto *retta corta* se $\hat{l}$ contiene $\frac{(q-1)}{2}$ punti.

Definizione 8.2. Un elemento $\hat{l} \in \hat{L}$ è detto *retta lunga* se $\hat{l}$ contiene $\frac{(q+1)}{2}$ punti.

Definizione 8.3. La coppia $K = K_q = (\hat{C}, \hat{L})$ è chiamato *modello discreto di Klein*.

Si definisca ora, invece, la seguente struttura d'incidenza $K_q^* = (C^*, L^*)$ dove C^* è l'insieme dei punti esterni alla conica C ed L^* è l'insieme $l \cap C^*$, essendo l una retta non secante C . Anche in questo caso ogni coppia "punto-retta corta" ammette due rette parallele ed ogni coppia "punto-retta lunga" non ammette alcuna parallela. Questa struttura è chiamata *modello complementare discreto di Klein*.

Si osservi come, nel caso reale, ci si trovi di fronte ad una situazione differente poiché le rette esterne contengono solamente punti esterni mentre quelle secanti contengono punti sia esterni che interni.

Definizione 8.4. I punti di C sono chiamati *punti impropri* di K ed i punti esterni a K sono detti *punti ideali*.

Se si fissa ora una retta corta di K_q ed un punto $x \in \hat{C}$, con $x \notin \hat{l}$, allora ci sono esattamente due rette corte parallele ad $\hat{l}$ (questo significa che le due rette incontrano $\hat{C}$ in $C \cap l$). Così la teoria dell'assioma iperbolico delle rette parallele è valida solo per l'insieme $\hat{l}_1$ di rette corte. Altrimenti $\hat{l}$ è una retta lunga ed allora non ci sono rette, per un punto $x \notin \hat{l}$, che siano parallele ad una retta lunga

fissata. Ne segue che nel modello discreto di Klein ci sono rette (rette corte) soddisfacenti proprietà iperboliche e rette (rette lunghe) soddisfacenti proprietà ellittiche.

Il problema finale è di caratterizzare la trasformazione omografica $\tau(C)$ che muta la conica fissata C in se stessa: $\tau(C)$ è detto *gruppo geometrico* di K_q .

9. Il gruppo $\tau(C)$

Sia W uno spazio vettoriale di dimensione tre su $GF(q)$. Siano $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ due vettori-colonna e sia $Y = BX$ una trasformazione regolare.

Si fissi una matrice regolare C e si consideri il seguente insieme definito da:

$$B = B(C) = \{B : \rho C = B^t C B, \rho \in \square\}$$

essendo $\square$ l'insieme dei quadrati di $GF(q)$, q dispari.

Teorema 1. Sia $(\bullet)$ la matrice prodotto. Allora $(B, \bullet)$ è un gruppo.

Dim. Supponiamo $B_1, B_2 \in B$. Allora:

$$(B_1)^t C B_1 = \rho_1 C \quad \text{e} \quad (B_2)^t C B_2 = \rho_2 C$$

dove $\rho_i \in \square$ ($i=1, 2$).

Ne segue che:

$$(B_1 B_2)^t C (B_1 B_2) = (B_2)^t \left[(B_1)^t C B_1 \right] B_2 = (B_2)^t (\rho_1 C) B_2 = \rho_1 \rho_2 C$$

Dunque $B_1, B_2 \in B$.

Si supponga ora che $B \in B$. Allora in B esiste $\rho \in \square$ tale che:

$$\rho C = B'CB$$

Si ha, cioè:

$$(B')^{-1}(\rho C)B^{-1} = (B')^{-1}(B'CB)B^{-1}$$

e quindi:

$$(B')^{-1}C(B^{-1}) = \frac{1}{\rho}C$$

da cui $B^{-1} \in B$.

c.v.d.

Teorema 2. Sia $\underline{P} = PG(2, q)$ un piano proiettivo di ordine q dispari. Sia $Y = BX$ una trasformazione proiettiva P con $B \in B(C_0)$ dove:

$$C_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Denotiamo con $\tau(C)$ l'insieme di siffatte P dove $B \in B(C_0)$.

Allora:

a) $(\tau(C), \bullet)$ è un gruppo.

b) Ogni $P \in \tau(C)$ lascia invariate $\hat{C}$ e C^* .

Dim.

a) Si considerino tre elementi P, P_1, P_2 di $\tau(C)$, definiti rispettivamente da:

$$P : Y = BX, P_1 : Y = B_1Z, P_2 : Z = B_2X \quad \text{con } B_1, B_2 \in B(C_0)$$

Poiché (P_1P_2) è definito da:

$$Y = (B_1B_2)X$$

e P^{-1} è definito da:

$$Y = B^{-1}X$$

allora $\tau(C_0)$ è isomorfo a $B(C_0)$. Di conseguenza $\tau(C)$ è un gruppo.

b) Sia:

$$F(X) = X^t C_0 X = x_1^2 - x_2 x_0 = 0$$

l'equazione della conica C .
Proviamo in primo luogo che:

$$F(Y) = F(BX) = \rho F(X), \quad \rho \in \square \quad (**)$$

dove $B \in B(C_0)$. Infatti:

$$B \in B(C_0) \Leftrightarrow B^t C_0 B = \rho C_0, \quad \rho \in \square$$

Risulta così:

$$\begin{aligned} F(BX) &= (BX)^t C_0 (BX) = X^t (B^t C_0 B) X = X^t (\rho C_0) X = \\ &= \rho (X^t C_0 X) = \rho F(X) \end{aligned}$$

Essendo quindi $X \in \hat{C}$ (o $X \in C^*$) se e solo se:

$$F(X) \in \square \quad (\text{o } F(X) \in \boxtimes)$$

poiché dalla (***) risulta $F(Y) = F(BX) = \rho F(X)$, $\rho \in \square$, ne segue che $F(Y) \in \square$ oppure $F(Y) \in \boxtimes$, a seconda che sia rispettivamente $X \in \square$ oppure $X \in \boxtimes$.

In altre parole:

$$P(Y) \in \hat{C} \quad (\text{o } P(Y) \in C^*)$$

c.v.d.

10. Le trasformazioni su $PG(2, q)$

Sia:

$$\begin{cases} \rho y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10}x_0 \\ \rho y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20}x_0 \\ \rho y_0 = a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{00}x_0 \end{cases} \quad (6)$$

una generica trasformazione su $PG(2, q)$.

Allora:

$$F(Y) = y_2 y_0 - y_1^2 = \frac{1}{\rho^2} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10}x_0)^2 = k (x_2 x_0 - x_1^2)$$

Valgono quindi le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} x_0^2) \quad & a_{20}a_{00} - a_{10}^2 = 0 \\ x_2^2) \quad & a_{22}a_{02} - a_{12}^2 = 0 \\ x_1x_2) \quad & a_{21}a_{02} + a_{22}a_{01} - 2a_{11}a_{12} = 0 \\ x_1x_0) \quad & a_{21}a_{00} + a_{20}a_{01} - 2a_{11}a_{10} = 0 \\ x_2x_0) \quad & a_{22}a_{00} + a_{20}a_{02} - 2a_{12}a_{10} = k \\ x_1^2) \quad & a_{11}^2 - a_{21}a_{01} = k \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che:

$$a_{20}a_{00}, a_{22}a_{02} \in \square \Rightarrow \begin{cases} a) \quad a_{20} = \beta b^2, \quad a_{00} = \alpha a^2, \quad a_{10} = \vartheta ab \\ b) \quad a_{22} = \gamma c^2, \quad a_{02} = \delta d^2, \quad a_{12} = \rho cd \end{cases}$$

dove $\alpha\beta = \vartheta^2$ e $\gamma\delta = \rho^2$.

Ne segue quindi che:

$$\begin{cases} a_{21}\delta d^2 + a_{01}\gamma c^2 - 2\rho cda_{11} = 0 \\ a_{21}\alpha a^2 + a_{01}\beta b^2 - 2\vartheta aba_{11} = 0 \\ a_{11}^2 - a_{21}a_{01} = \alpha\gamma a^2 c^2 + \beta\delta b^2 d^2 - 2\rho\vartheta abcd \end{cases} \quad (7)$$

da cui:

$$\begin{cases} a_{21} = -2bct(\vartheta\gamma ac - \rho\beta bd) \\ a_{01} = 2adt(\vartheta\delta bd - \rho\alpha ac) \\ a_{11} = t(\beta\delta b^2 d^2 - \alpha\gamma a^2 c^2) \end{cases}$$

e così, sostituendo nella terza equazione del sistema (7), si ha:

$$\begin{aligned} & t^2(\delta\beta b^2 d^2 - \alpha\gamma a^2 c^2)^2 + 2bct(\vartheta\gamma ac - \rho\beta bd) \bullet 2adt(\vartheta\delta bd - \rho\alpha ac) = \\ & = \alpha\gamma a^2 c^2 + \beta\delta b^2 d^2 - 2\rho\vartheta abcd \end{aligned}$$

per cui, ricordando che $\alpha\beta = \vartheta^2$, $\gamma\delta = \rho^2$ e supponendo $\alpha\gamma = u^2$, $\beta\delta = v^2$, $uv = \vartheta\rho$, risulta:

$$t^2(A^2 - 4\rho\vartheta abcdB) = B$$

dove:

$$\begin{cases} A = \beta\delta b^2 d^2 - \alpha\gamma a^2 c^2 \\ B = \alpha\gamma a^2 c^2 + \beta\delta b^2 d^2 - 2\rho\vartheta abcd \end{cases}$$

Notiamo allora che quando $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1\}$ si ha:

$$t^2(b^2 d^2 - a^2 c^2)^2 - 4abcdt^2(ac - bd)^2 = (ac - bd)^2$$

da cui:

$$t^2 = \frac{1}{(bd - ac)^2}$$

Infine così si ottiene una soluzione in t in un solo caso.

Bibliografia

- [1] Agazzi E., Palladino D., *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Edizioni scientifiche e tecniche Mondadori
- [2] Bolyai J. (1955) *The science of absolute space*, in Bonola R., *Non-euclidean geometry*, New York
- [3] Bonola R. (1906; ristampa 1975) *La geometria non euclidea*, Bologna
- [4] Di Gennaro F., Eugeni F. (1906; ristampa 1975) Strutture pseudo-euclidee su campi di Galois, “*Le Matematiche*”, Volume LII, Fascicolo 1
- [5] Eugeni F., La Matematica discreta attraverso i problemi (1996), in: *Cento Anni di Matematica (Atti del Congresso Nazionale Mathesis Centenario, 1895-1995)*, Palombi, 84-102
- [6] Eugeni F., Tondini D. (2001) *The duality in a Galois Klein's plane*, *Advances in Generalized Structures Approximate Reasoning, and Applications*, Performantica Press, Iasi, 85-90.
- [7] Eugeni F., Tondini D., Klein's Discrete Model: the case of odd order, *Journal of Information & Optimization Sciences* (to appear)
- [8] Greenberg M.G. (1973) *Euclidean and non-euclidean geometries*, San Francisco
- [9] Klein F. (1968) *Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie*, Berlino
- [10] Manning H.P. (1963) *Introductory non-euclidean geometry*, New York
- [11] Meschkowski H. (1963) *Noneuclidean geometry*, New York

- [12] Ministero della Pubblica Istruzione—O.C.S.E. (1963), Mario Villa, a cura di, *Un insegnamento moderno della Matematica*, Patron, Bologna
- [13] Segre B. (1961) *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma
- [14] Sommerville D.M.Y. (1958) *Elements of non-euclidean geometry*, New York
- [15] Stäckel P., Engel F. (1895) *Die Theorie der Parallelinien von Euclid bis auf Gauss*, Lipsia