Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano

Franco Eugeni[1], Raffaele Mascella[2]

Sunto: In questo lavoro si costruisce una struttura assiomatica completa della retta euclidea. La costruzione geometrica della retta reale avviene in maniera indipendente dal piano. In questo contesto sono sintetizzate alcune proprietà che tale assiomatica individua, fra cui emergono le più note proprietà additive, l'ordinamento totale della retta e l'isomorfismo con i reali.

Parole chiave: Geometria Euclidea, Geometria della retta.

Introduzione

Lo studio della retta euclidea e della sua geometria, che può essere indipendente da quella planare e spaziale, è spesso poco considerato e raramente appare tra le problematiche classiche dei fondamenti della Geometria Euclidea. Generalmente, infatti, la geometria della retta nasce in maniera indotta dalla geometria piana, anche se una definizione della retta a se stante condurrebbe ad una costruzione, per certi versi alternativa, dei numeri reali.

Storicamente, è comunque noto l'impegno di Peano [1], [2] e Pasch [3] (cfr. Marchi [7]) per rendere autonoma la struttura assiomatica della retta euclidea. I lavori di Peano, in particolare, hanno il pregio di fissare l'attenzione su alcuni postulati coerenti sotto il profilo logico (cfr. Freguglia [8]) e chiari da un punto di vista semantico, in quanto

[1] Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: eugenif@tin.it
[2] Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: rmascella@tin.it

espressi mediante un linguaggio simbolico, ma hanno il neo di non andare oltre la geometria di incidenza.
Dal nostro punto di vista, il lavoro di Peano poteva e doveva essere completato considerando, almeno, due aspetti rilevanti:
(1) gli stessi assiomi dell'ordinamento sono stati introdotti da Peano sviluppando una opportuna relazione ternaria chiamata "stare fra". Peano aveva ben costruito la definizione ed analizzato alcune sue conseguenze, ma non aveva studiato il legame che può intercorrere tra questa relazione ternaria ed una eventuale relazione d'ordine totale, come analizzato anche in Freguglia [8];
(2) gli assiomi, e le proprietà che Peano ne aveva dedotto, non approfondivano le problematiche relative al movimento dei segmenti e non trattavano affatto quelle concernenti la continuità della retta, per cui l'assiomatica andava resa completa in modo da costruire pure l'isomorfismo con il campo reale.
Nel nostro lavoro questi aspetti vengono trattati a fondo e, in particolare al punto (1), si dimostra che l'assiomatica dello "stare fra" è del tutto equivalente all'assiomatica di un "ordinamento totale", mentre, per il punto (2), si perviene alla completa organizzazione della retta euclidea anche dal punto di vista della congruenza e continuità.
La problematica che abbiamo presentato in questo lavoro prelude ad altri lavori che abbiamo in preparazione e dei quali questo costituisce il punto di partenza.
Per inciso, una sintesi della parte (2), con molti dettagli dimostrativi lasciati al lettore, è in corso di stampa (cfr. [10]) su rivista.

1. Postulati di appartenenza

Sia L un insieme non vuoto di elementi detti "punti". Considereremo, nel seguito, una serie di assiomi così suddivisi: postulati di appartenenza, di ordinamento, di congruenza e di continuità. Gli assiomi dell'appartenenza stabiliscono le proprietà iniziali di esistenza e gli ulteriori collegamenti fra gli oggetti introdotti. Nel nostro caso, occupandoci unicamente della geometria della retta, ed essendo i punti gli unici enti introdotti, abbiamo un solo assioma di esistenza.

***Ass.* I1**. (*Esistenza di due punti*) Su L ci sono almeno due punti.

2. Postulati di ordinamento

Gli assiomi di questo gruppo conferiscono all'insieme L la struttura di linea retta attraverso una relazione "fra" i suoi punti. Questa relazione rende possibile, inoltre, l'ordinamento dei punti sulla retta.
Comunque dati in L due punti A, B ad essi è associata una parte di L, denotata con $]A, B[$ che si chiama "segmento assoluto aperto". Denotiamo con S l'insieme di tutti i segmenti assoluti
$S = \{]A, B[: A, B \in L\}$. Poniamo ancora $[A, B] =]A, B[\cup \{A, B\}$.
Supponiamo definita in L una relazione ternaria "stare fra". Per indicare che fra tre punti esiste tale relazione, ad esempio che B "sta fra" A e C, utilizzeremo la notazione insiemistica $B \in]A, C[$.
Supponiamo che la coppia (L, S) soddisfi agli assiomi che seguono.

***Ass.* II1**. (*Invertibilità e differenziazione dagli estremi*) Se $B \in]A, C[$ allora A, B, C sono punti distinti e $B \in]C, A[$.

Corollario 2.1. Fra due punti coincidenti non giace alcun punto, ovvero $\forall A \in L$ si ha $]\mathrm{A}, \mathrm{A}[= \emptyset$.
Dim. Se fosse $B \in]A, A[$ allora B, A, A dovrebbero essere tutti distinti.

Corollario 2.2. L'estremo di un segmento non è interno al segmento stesso, ovvero $A \notin]A, B[$.
Dim. Se fosse $A \in]A, B[$ allora A, A, B dovrebbero essere tutti distinti.

Corollario 2.3. Dati due qualsiasi punti A e B, vale $]A, B[=]B, A[$.
Dim. La verifica è immediata dall'ass. II1 e dal corollario 2.1.

***Ass.* II2**. (*Prolungabilità*) Dati i punti distinti A e C, esiste almeno un punto D tale che $C \in]A, D[$.

***Ass.* II3**. (*Densità*) Dati i punti distinti A e C, c'è sempre almeno un punto B tale che $B \in]A, C[$.

Osservazione. Per via dell'assioma II2 l'insieme L è illimitato.Per via dell'assioma II3 i segmenti che hanno estremi distinti non sono mai vuoti, fornendo ad L la proprietà di essere denso.

***Ass.* II4**. (*Ordinabilità di tre punti*) Dati comunque tre punti distinti, ne esiste almeno uno che sta fra gli altri due.

***Ass.* II5**. (*Transitività di prima specie*) Dati i punti distinti A, B, C, D se $B \in\ ]A, C[$ e se $C \in\ ]B, D[$ allora B sta anche fra A e D.

***Ass.* II6**. (*Transitività di seconda specie*) Dati i punti distinti A, B, C, D se $B \in\ ]A, C[$ e se $C \in\ ]A, D[$ allora C sta anche fra B e D.

Corollario 2.4. Di tre punti qualsiasi distinti ce n'è esattamente uno che giace fra gli altri due.
Dim. Per l'assioma II4, fra i punti A, B, C ce n'è almeno uno che giace fra gli altri due. Se valessero insieme $B \in\ ]A, C[$ e $C \in\ ]A, B[$, allora per l'assioma II6 sarebbe anche $C \in\ ]B, B[$. Così se valessero insieme $B \in\ ]A, C[$ e $A \in\ ]B, C[$, sarebbe anche $A \in\ ]B, A[$, e se valessero insieme $A \in\ ]B, C[$ e $C \in\ ]A, B[$ sarebbe anche $C \in\ ]A, C[$. In ogni caso si avrebbe un assurdo.

Corollario 2.5. Dati i punti distinti A, B, un generico punto C può trovarsi soltanto in una delle seguenti situazioni:
i) $A \in\ ]C, B[$;   ii) $C = A$;   iii) $C \in\ ]A, B[$;   iv) $C = B$; v) $B \in\ ]A, C[$.
Dim. Per via dell'assioma II4 e dei corollari 2.2 e 2.4, il punto C, se è distinto dagli estremi A e B, è in relazione di "stare fra" con essi secondo uno dei tre casi possibili.

Corollario 2.6. Se $B \in\ ]A, C[$ e $C \in\ ]B, D[$ allora vale $C \in\ ]A, D[$.
Dim. Per l'assioma II1 se $B \in\ ]A, C[$ e $C \in\ ]B, D[$ allora valgono anche $B \in\ ]C, A[$ e $C \in\ ]D, B[$ pertanto, per il primo assioma di transitività, vale $C \in\ ]D, A[$ ovvero $C \in\ ]A, D[$.

Corollario 2.7. Se $B \in\ ]A, D[$ e $C \in\ ]B, D[$ allora valgono $B \in\ ]A, C[$ e $C \in\ ]A, D[$.

Dim. Per l'assioma II1 valgono $C \in \,]D, B[$ e $B \in \,]D, A[$ dunque per II6 vale $B \in \,]C, A[$ ovvero $B \in \,]A, C[$. Inoltre, per il corollario 2.6, se valgono $B \in \,]A, C[$ e $C \in \,]B, D[$ allora vale pure $C \in \,]A, D[$.

Corollario 2.8. Se $B \in \,]A, C[$ e $C \in \,]A, D[$ allora B sta pure fra A e D.
Dim. Consideriamo i tre punti A, B, D: tra essi ce n'è uno che giace fra gli altri due. Supponiamo inizialmente che A stia fra B e D. Allora poiché $B \in \,]C, A[$ e $A \in \,]B, D[$ per l'assioma II5 B sta fra C e D. D'altro canto per II6 se $B \in \,]A, C[$ e $C \in \,]A, D[$ allora vale $C \in \,]B, D[$ e dunque perveniamo ad un assurdo perché non possono essere contemporaneamente $B \in \,]C, D[$ e $C \in \,]B, D[$.
Ora supponiamo che D stia fra A e B. Per l'assioma II6, se $D \in \,]A, B[$ e $B \in \,]A, C[$ allora vale anche $B \in \,]D, C[$. Sempre per l'assioma II6 se $B \in \,]A, C[$ e $C \in \,]A, D[$ allora $C \in \,]B, D[$: assurdo.
Pertanto fra i tre punti A, B, D il punto che sta fra gli altri due è B.

Proposizione 2.9. Tra due punti distinti di L vi sono infiniti punti.
Dim. Siano dati due punti distinti A e B. Fra essi esiste, per l'assioma II3, un punto interno A_1. Consideriamo ora la coppia A_1, B: per lo stesso assioma esiste un punto A_2 tale che $A_2 \in \,]A_1, B[$ e poiché vale $A_1 \in \,]A, B[$ vale pure $A_2 \in \,]A, B[$. Il processo si può iterare all'infinito con la costruzione di ulteriori punti A_n in modo che, di volta in volta, $A_n \in \,]A_{n\text{-}1}, B[$ e dunque $A_n \in \,]A, B[$.

Proposizione 2.10. Siano dati i punti A, B, H, C tali che $B \in \,]A, C[$ e $H \in \,]A, C[$. Allora vale una ed una soltanto delle seguenti:
i) $H \in \,]A, B[$ ii) $H = B$ iii) $H \in \,]B, C[$
Dim. Consideriamo A, H, B. Supponiamo che non sia $H \in \,]A, B[$. Allora, per il corollario 4, dovrà essere una fra $A \in \,]H, B[$, $B \in \,]A, H[$, $H = B$ (per ipotesi $H \neq A$). Se $A \in \,]H, B[$, poiché $B \in \,]A, C[$, varrebbe anche $A \in \,]H, C[$: assurdo perché fra A, H e C il punto che sta fra gli altri due è per ipotesi H. Se invece vale $B \in \,]A, H[$, poiché vale anche $H \in \,]A, C[$ allora vale pure $H \in \,]B, C[$.

Proposizione 2.11. Siano dati $C \in\ ]A, B[$ e $D \in\ ]A, B[$, punti distinti. Allora vale $]C, D[\ \subset\ ]A, B[$.

Dim. Sia H un punto del segmento $]C, D[$. Consideriamo la terna A, B, H. Se fosse $A \in\ ]H, B[$ allora, poiché vale $C \in\ ]A, B[$, sarebbe anche $C \in\ ]H, B[$; (in modo analogo da $A \in\ ]H, B[$ e $D \in\ ]A, B[$ seguirebbe $D \in\ ]H, B[$). Dalle relazioni ora ottenute, in combinazione con $H \in\ ]C, D[$, si avrebbe $C \in\ ]B, D[$ e $D \in\ ]B, C[$: assurdo.

Se fosse $H = A$, poiché vale $H \in\ ]C, D[$, sarebbe anche $A \in\ ]C, D[$. Ma per ipotesi è $C \in\ ]A, B[$ dunque varrebbe anche $A \in\ ]B, D[$. assurdo.

Se fosse $B \in\ ]A, H[$, poiché $C \in\ ]A, B[$, sarebbe anche $C \in\ ]A, H[$; (analogamente da $B \in\ ]A, H[$ e $D \in\ ]A, B[$ seguirebbe $D \in\ ]A, H[$). Dalle relazioni trovate e dall'ipotesi $H \in\ ]C, D[$, si otterrebbe da un lato $C \in\ ]A, D[$ e dall'altro $D \in\ ]A, C[$: assurdo.

Se fosse $H = B$, poiché vale $H \in\ ]C, D[$, sarebbe anche $B \in\ ]C, D[$. Ma essendo $C \in\ ]A, B[$ seguirebbe anche $B \in\ ]A, D[$: assurdo.

In definitiva rimane accettabile solo il caso $H \in\ ]A, B[$.

Proposizione 2.12. Dati quattro punti distinti su L, questi si possono sempre indicare con A, B, C, D in modo che il punto indicato con B stia fra A e C e anche fra A e D e che il punto indicato con C stia fra B e D e anche fra A e D.

Dim. Detti inizialmente P_1, P_2, P_3, P_4 i punti, le terne da considerare ai fini della relazione di "stare fra" sono esattamente quattro, in queste le relazioni fanno sì che due punti P_1 e P_2, nelle relazioni in cui compaiono, non sono mai interni: questi punti li denominiamo con A e D. Gli altri due punti vengono denominati di conseguenza: se fra A, P_3 e P_4 vale $P_3 \in\ ]A, P_4[$ allora $P_3 = B$ e $P_4 = C$ altrimenti, nel caso valga $P_4 \in\ ]A, P_3[$, denotiamo $P_3 = C$ e $P_4 = B$.

Teorema 2.13. Se è dato un numero finito di punti distinti sulla retta, questi si possono sempre indicare con A_1, A_2, A_3, …, A_k in modo che il punto indicato con A_i stia fra i punti A_1, …, A_{i-1} da una parte ed i punti A_{i+1}, …, A_k dall'altra.

Dim. (Generalizzazione della Proposizione 4).

Osservazione. Oltre a questo modo di contrassegnare i punti c'è solo quello con ordine inverso A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, …, A_2, A_1 che ha la stessa proprietà espressa dal Teorema 1.

Definiamo due nuove relazioni binarie, denotate rispettivamente con “$<$” e “$\leq$”, usando la relazione ternaria di “stare fra”. Per tale scopo fissiamo due punti P e Q distinti.
Consideriamo due punti A, B fra loro distinti. Definiamo “$<$” nel seguente modo:
i) se $B \in\ ]A, P[$ e $P \in\ ]A, Q[$ allora $A < B$;
ii) se $P \in\ ]A, Q[$ e $B = P$ allora $A < B$;
iii) se $P \in\ ]A, Q[$ e $P \in\ ]A, B[$ allora $A < B$;
iv) se $A \in\ ]P, Q[$ e $A \in\ ]P, B[$ allora $A < B$;
v) se $A = P$ e $B \in\ ]A, Q[$ allora $A < B$;
vi) se $A = P$ e $B = Q$ allora $A < B$;
vii) se $A = P$ e $Q \in\ ]A, B[$ allora $A < B$;
viii) se $A = Q$ e $A \in\ ]P, B[$ allora $A < B$;
ix) se $Q \in\ ]A, P[$ e $A \in\ ]Q, B[$ allora $A < B$;
x) in tutti gli altri diciamo $B < A$.
Definiamo infine la relazione “$\leq$” nel seguente modo: se A e B sono due qualsiasi punti (non necessariamente distinti) allora denotiamo $A \leq B$ se e soltanto se $A < B$ oppure $A = B$.

Osservazione. I dieci casi, i) … x), che definiscono la relazione “$<$”, racchiudono tutte le possibili disposizioni dei punti e sono, nel contempo, tra loro alternativi. Per questo, se due punti sono fra loro distinti, soddisfano una ed una sola condizione fra quelle descritte.

Proposizione 2.14. La relazione “$\leq$”è d'ordine totale su L.
Dim. La verifica delle proprietà è immediata:
a) (riflessiva) Dato $A \in L$, essendo $A = A$, si ha anche $A \leq A$;
b) (antisimmetrica) Siano dati $A, B \in L$ con $A \leq B$ e $B \leq A$. Allora deve essere $A = B$ infatti, se così non fosse, dovrebbe valere $A < B$, per cui A e B sarebbero distinti e varrebbe una fra le condizioni i) … vi) che definiscono la relazione “$<$”; ciò sarebbe in contraddizione con $B \leq A$

in quanto non potrebbe essere né $A = B$, né $B < A$, in quanto sono distinti e la condizione vii) è alternativa alle sue precedenti;
c) (transitiva) Siano dati A, B, $C \in L$ supponiamo $A \leq B$ e $B \leq C$. Se vale almeno una fra $A = B$ e $B = C$ allora si ha banalmente che $A < C$ oppure, nel caso valgano entrambe, $A = C$, per cui $A \leq C$. Se invece valgono contemporaneamente $A < B$ e $B < C$, vanno considerate tutte le possibilità i) … vi) in relazione ad entrambe le disuguaglianze.
Supponiamo che valga, sia da un lato che dall'altro, la condizione i), ovvero $B \in\ ]A, P[$, $P \in\ ]A, Q[$ e $C \in\ ]B, P[$, $P \in\ ]B, Q[$. Da $B \in\ ]A, P[$ e $C \in\ ]B, P[$ segue $C \in\ ]A, P[$ e poiché $P \in\ ]A, Q[$ sono soddisfatte le condizioni del caso i) per i punti A e C, dunque $A < C$.
Se invece valgono la condizione ii) da un lato e la vii) dall'altro, cioé $P \in\ ]A, Q[$, $B = P$ e $Q \in\ ]B, C[$, è banalmente vero che $B \in\ ]A, Q[$, e ne segue che $B \in\ ]A, C[$ ovvero $P \in\ ]A, C[$. Ora, per via del punto iii) della definizione, poiché $P \in\ ]A, Q[$ e $P \in\ ]A, C[$, vale $A < C$.
Non procediamo oltre nelle verifiche in quanto, nei casi rimanenti, esse sono del tutto analoghe a quelle descritte.
d) (correlazione) Siano A, $B \in L$. Se vale A = B ne discende banalmente che valgono sia $A \leq B$ che $B \leq A$. Nel caso A e B siano distinti consideriamo, utilizzando il corollario 4, la loro posizione relativa rispetto a P e Q, punti fissati a priori. Dall'analisi di tutte le possibili relazioni si ritrovano i casi i) … vii) che definiscono la relazione "<" per cui deve valere $A < B$ oppure $B < A$. Da ciò deriva anche $A \leq B$ oppure $B \leq A$.

Osservazione. Assieme alla relazione binaria "≤" rimane definita su L anche la relazione duale "≥", anch'essa d'ordine totale su L. Nel seguito la relazione "≤"sarà l'ordinamento predefinito.

Dati i punti A e B, tali che $A < B$, accanto al segmento assoluto $]A, B[$, consideriamo l'insieme ordinato $(A, B) = (]A, B[, \leq)$ che prende il nome di "segmento orientato positivamente". L'altro insieme ordinato $-(A, B) = (]A, B[, \geq)$ prende invece il nome di "segmento orientato negativamente" o "opposto" del segmento (A, B). Salvo indicazioni

diverse, nel seguito ci riferiremo sempre a segmenti con orientamento positivo.
Definiamo infine gli insiemi: $I(A) = \{P \in L \mid A \leq P\}$, denominata "semiretta destra" di origine A, e $I'(A) = \{P \in L \mid P \leq A\}$, denominata "semiretta sinistra" di origine A. Questi insiemi, per l'ordinamento totale sull'insieme L, hanno in comune solo il punto A.

3. Postulati di congruenza

Gli assiomi di questo gruppo definiscono una relazione fra i segmenti di retta e stabiliscono, in tal modo, anche il concetto di movimento.
Supponiamo definita una relazione "≡" sull'insieme dei segmenti orientati detta "congruenza" ed il seguente gruppo di assiomi.

***Ass.* III1**. (*Invertibilità dei segmenti*) Ogni segmento (A, B) è congruo al suo opposto $-(A, B)$.

***Ass.* III2**. (*Pseudotransitività*) Se $(A', B') \equiv (A, B)$ e $(A'', B'') \equiv (A, B)$ allora vale anche $(A', B') \equiv (A'', B'')$.

Corollario 3.1. La congruenza è una relazione d'equivalenza.
Dim. Da $(A, B) \equiv (A', B')$ e $(A, B) \equiv (A', B')$ segue che $(A, B) \equiv (A, B)$, dunque "≡" è riflessiva; da $(A', B') \equiv (A', B')$ e $(A, B) \equiv (A', B')$ segue che $(A', B') \equiv (A, B)$, per cui "≡" è simmetrica; se $(A, B) \equiv (A', B')$ e $(A', B') \equiv (A'', B'')$ poiché vale anche $(A'', B'') \equiv (A', B')$ per simmetria, segue $(A, B) \equiv (A'', B'')$, dunque "≡" è transitiva.

Gli elementi dell'insieme quoziente $S / \equiv$ sono detti "ampiezze" dei segmenti. Usualmente, invece di dire che un segmento appartiene ad una classe (la sua ampiezza), si dice, per abuso di linguaggio, che "ha quella ampiezza".

***Ass.* III3**. (*Addizionabilità*) Siano (A, B), (B, C) segmenti disgiunti così come (A', B') e (B', C'). Se $(A, B) \equiv (A', B')$ e $(B, C) \equiv (B', C')$ allora vale pure $(A, C) \equiv (A', C')$.

***Ass.* III4**. (*Trasporto*) Dati i punti A, B, A' ed una semiretta di origine A', esiste un unico punto C su tale semiretta tale che $(A, B) \equiv (A', C)$.

Osservazione. L'assioma del trasporto individua due punti, uno su ciascuna semiretta di origine A': $C \in I(A')$ e $C' \in I'(A')$. Per tali punti vale dunque $C' \leq A' \leq C$.

Corollario 3.2. Siano assegnati i punti A e B e la semiretta di origine A che contiene B. Se il punto B' soddisfa $(A, B) \equiv (A, B')$ allora $B' = B$ (analogamente se $(B, A) \equiv (B', A)$ allora $B' = B$).
Dim. Se B' soddisfa $(A, B) \equiv (A, B')$, poiché vale $(A, B) \equiv (A, B)$, i due punti B e B' soddisfano entrambi all'assioma del trasporto e per l'unicità di tale punto deve essere $B = B'$.

Proposizione 3.3. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A < H \leq B$, $K \in I(H)$. Allora vale anche $B < K$.
Dim. Se fosse $B = K$, essendo $A \in I'(B)$ e $H \in I'(K)$, da $(A, B) \equiv (H, B)$ seguirebbe $A = H$: assurdo. Supponiamo ora $K < B$. Sia $C \in I(B)$ tale che $(A, H) \equiv (B, C)$. Poiché valgono $(A, H) \equiv (B, C)$, $(H, K) \equiv (H, K)$ e $(K, B) \equiv (K, B)$, utilizzando l'assioma III3, si ottiene $(A, B) \equiv (H, C)$ e poiché $C \in I(B) \subseteq I(H)$, per l'unicità del trasporto, segue $C = K$ perciò $C < B$: assurdo. L'unica possibilità rimasta è dunque $B < K$.

Corollario 3.4. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A < H$, $B \in I(A)$, $K \in I(H)$. Allora vale $B < K$.
Dim. Se $B < H$, essendo $H \leq K$, è immediato che sia anche $B < K$. Invece, se $H \leq B$, è in base alla proposizione 3.3 che si ha $B < K$.

Proposizione 3.5. Siano $(A, B) \equiv (H, K)$ con $A \leq K < B$, $H \in I'(K)$. Allora vale anche $H < A$.
Dim. La verifica è del tutto analoga a quella della proposizione 3.3.

Corollario 3.6. Siano dati A, B, H, K tali che: $(A, B) \equiv (H, K)$, $K < B$, $A \in I'(B)$, $H \in I'(K)$. Allora vale anche $H < A$.

Dim. Se $K < A$, essendo $H \leq K$, ne deriva $H < A$. Invece, se $A \leq K$, si ha la stessa tesi in base alla proposizione 3.5.

Osservazione. Per via dei risultati 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, due segmenti non possono essere congruenti se sono contenuti l'uno nell'altro.

Proposizione 3.7. Siano A, B, H, K, D in modo che $(A, B) \equiv (H, K)$ e $A \leq D \leq B$. Allora esiste ed è unico il punto F che soddisfa: $H \leq F \leq K$, $(A, D) \equiv (H, F)$, $(D, B) \equiv (F, K)$.
Dim. Per l'assioma del trasporto esiste ed è unico il punto $F \in I(H)$ tale che $(A, D) \equiv (H, F)$. Inoltre esiste ed è unico il punto $G \in I(F)$ tale che $(D, B) \equiv (F, G)$. Per l'assioma di addizionabilità dei segmenti si ha $(A, B) \equiv (H, G)$, per cui deve essere $G = K$, dunque $(D, B) \equiv (F, K)$.

Osservazione. In base alla proposizione precedente, dati due segmenti congruenti ed una qualsiasi suddivisione del primo segmento, è possibile suddividere il secondo, in modo peraltro unico, in modo da avere segmenti rispettivamente congruenti.

Proposizione 3.8. Siano $A \leq B \leq C$, $D \leq E \leq F$ con $(A, C) \equiv (D, F)$. Si hanno i seguenti casi:
i) se $(A, B) \equiv (D, E)$ allora $(B, C) \equiv (E, F)$;
ii) se $(A, B) \equiv (E, F)$ allora $(B, C) \equiv (D, E)$.
Dim. Supponiamo $(A, B) \equiv (D, E)$. Per l'assioma del trasporto esiste, ed è unico, $H \in I(E)$ tale che $(B, C) \equiv (E, H)$. Per l'assioma di addizionabilità segue che $(A, C) \equiv (D, H)$ dunque $(D, F) \equiv (D, H)$ da cui $H = F$ e perciò $(B, C) \equiv (E, F)$.
Supponiamo ora $(A, B) \equiv (E, F)$: esiste, ed è unico, $K \in I'(E)$ tale che $(B, C) \equiv (K, E)$. Sempre per l'addizionabilità segue $(A, C) \equiv (K, F)$ e dunque $(D, F) \equiv (K, F)$. Perciò $D = K$ e dunque $(B, C) \equiv (D, E)$.

Proposizione 3.9. Siano $(A, B) \equiv (C, D)$, $A < C$, $(A, B) \cap (D, E) \neq \emptyset$. Allora valgono $C \in (A, B)$ e $B \in (C, D)$.
Dim. Sia $H \in (A, B) \cap (D, E)$. Essendo $A < H < B$ e $C < H < D$ si ha che $A < C < H < B$ ovvero la prima parte della tesi: $C \in (A, B)$. Poiché

$(A, B) \equiv (C, D)$, per la proposizione 3.3, deve essere $B < D$ da cui la seconda parte della tesi.

Proposizione 3.10. Siano $(A, B) \equiv (C, D)$. Allora $(A, C) \equiv (B, D)$.
Dim. Supponiamo inizialmente che i due segmenti (A, B) e (C, D) siano disgiunti. Sfruttando il fatto che $(B, C) \equiv (B, C)$ e l'assioma III3 si ha la tesi. Supponiamo ora che $(A, B) \cap (C, D) \neq \emptyset$. Se $A < C$, per la prop. YYY, si ha $C \in (A, B)$ e $B \in (C, D)$ da cui $(C, B) \subset (A, B)$ e $(C, B) \subset (C, D)$. Consideriamo dunque i tre segmenti (A, C), (C, B) e (B, D). Poiché $(C, B) \equiv (C, B)$ e, per ipotesi, $(A, B) \equiv (C, D)$, per la proposizione XXX si ha la tesi $(A, C) \equiv (B, D)$. Nel caso $C < A$ la dimostrazione è del tutto analoga.

Definizione. Per mezzo del postulato del trasporto, allorché si fissi definitivamente un punto O, è indotta un'operazione binaria

$$\text{“+”}: L \times L \to L \qquad (1)$$

di addizione sui punti di L. L'operazione $A + B = C$ è definita individuando il punto C nel modo seguente:
a) se $O \leq A$ si prende l'unico punto $C \in I(B)$ per cui $(O, A) \equiv (B, C)$;
b) se $A \leq O$ si prende l'unico punto $C \in I'(B)$ per cui $(A, O) \equiv (C, B)$.

Proposizione 3.11. Il punto O è l'elemento neutro di “+”.
Dim. Consideriamo la somma $A + O = C$. Se $O \leq A$, $C \in I(B)$ soddisfa $(O, A) \equiv (O, C)$ da cui $C = A$. Se invece $A \leq O$, $C \in I'(B)$ e soddisfa $(A, O) \equiv (C, O)$ da cui ancora $C = A$. Ciò dimostra l'esistenza di un elemento neutro O. Dimostriamone ora l'unicità.
Sia B un altro punto tale che $A + B = A$. Se $O \leq A$ allora, per definizione, $A \in I(B)$ e $(O, A) \equiv (B, A)$ cioè $B \in I'(A)$ ma poiché anche $O \in I'(A)$, per l'unicità del trasporto, $B = O$. Se $A \leq O$ allora $A \in I'(B)$ e vale $(A, O) \equiv (A, B)$ cioè $B \in I(A)$ ma anche $O \in I(A)$ per cui $B = O$.

Proposizione 3.12. L'operazione “+” è associativa.
Dim. Supponiamo $O \leq A$, $B \leq O$, $O \leq C$, $O \leq A + B$, $O \leq B + C$.

Consideriamo dapprima la somma $(A + B) + C$. Sia $F \in I(B)$ per cui $(O, A) \equiv (B, F)$ e sia $H \in I(C)$ per cui $(O, F) \equiv (C, H)$. In particolare da quest'ultima si ha anche $(O, C) \equiv (F, H)$. Consideriamo ora la somma $A + (B + C)$. Sia $G \in I'(C)$ per cui $(B, O) \equiv (G, C)$ e sia $K \in I(G)$ tale che $(O, A) \equiv (G, K)$. Dalla prima congruenza, in particolare, si ha anche $(B, G) \equiv (O, C)$. Combinando opportunamente le congruenze si trova sia $(B, F) \equiv (G, K)$ che $(B, G) \equiv (F, H)$ ovvero $(B, F) \equiv (G, H)$. Da queste si evince che $K = H$ cioè $(A + B) + C = A + (B + C)$.
Supponiamo ora $A \leq O$, $O \leq B$, $O \leq C$, $A + B \leq O$, $O \leq B + C$.
Per la somma $(A + B) + C$, sia $F \in I'(B)$ per cui $(A, O) \equiv (F, B)$ e sia ancora $H \in I'(C)$ per cui $(F, O) \equiv (H, C)$ ovvero $(F, H) \equiv (O, C)$. Invece per $A + (B + C)$, sia $G \in I(C)$ il punto per cui $(O, B) \equiv (C, G)$ e sia $K \in I'(G)$ tale che $(A, O) \equiv (K, G)$. In particolare dalla prima congruenza si ha anche $(O, C) \equiv (B, G)$. Da queste congruenze si ottengono $(F, B) \equiv (K, G)$ e $(F, H) \equiv (B, G)$ ovvero $(F, B) \equiv (H, G)$. Da ciò risulta $K = H$.
La verifica che "+" è associativa negli ulteriori casi è del tutto analoga alle verifiche nei casi qui analizzati. Si lascia pertanto il resto della dimostrazione come utile esercizio per il lettore.

Proposizione 3.13. L'operazione "+" è commutativa.
Dim. Siano inizialmente $A + B = H$, $B + A = K$.
Se $O \leq A$ e $O \leq B$ allora $H \in I(B)$, $(O, A) \equiv (B, H)$ ed anche $K \in I(A)$, $(O, B) \equiv (A, K)$. Da $(O, A) \equiv (B, H)$ segue $(O, B) \equiv (A, H)$ per cui vale $(A, K) \equiv (A, H)$ dunque $K = H$.
Se $O \leq A$ e $B \leq O$ allora $H \in I(B)$, $(O, A) \equiv (B, H)$, e anche $K \in I'(A)$, $(B, O) \equiv (K, A)$. Poiché $(O, A) \equiv (B, H)$, si ha $(B, O) \equiv (H, A)$ per cui $(K, A) \equiv (H, A)$ dunque $K = H$.
La verifica degli ultimi due casi è analoga. Lasciamo la loro dimostrazione come esercizio al lettore.

Definizione. Dato un punto A, definiamo il punto $-A$ in questo modo:
a) se $O \leq A$ prendiamo $-A \in I'(O)$ tale che $(-A, O) \equiv (O, A)$;
b) se $A \leq O$ prendiamo $-A \in I(O)$ tale che $(O, -A) \equiv (A, O)$.
Per come è definito, il punto $-A$ è unico.

Nel seguito scriveremo anche $A - B$ per indicare la somma $A + (-B)$ e parleremo, per questo, anche di "differenza" fra due punti.

Proposizione 3.14. Ogni elemento di L ha l'elemento opposto.
Dim. Dato un generico punto A, consideriamo la somma $A + (-A) = H$. Se $O \leq A$ allora $H \in I(-A)$ e, per come è definito $-A$, valgono le relazioni $(-A, H) \equiv (O, A) \equiv (-A, O)$ per cui $H = O$. Se invece $A \leq O$ allora $H \in I'(-A)$ e dunque $(H, -A) \equiv (A, O) \equiv (O, -A)$ per cui $H = O$. Provata l'esistenza dell'elemento opposto, verifichiamone l'unicità. Sia B un punto tale che $A + B = O$. Se $O \leq A$ allora $(O, A) \equiv (B, O)$ dove $O \in I(B)$, ovvero $B \in I'(O)$. Per l'unicità del trasporto il punto B nella semiretta $I'(O)$ deve coincidere con $-A$. Se invece $A \leq O$ allora $(A, O) \equiv (O, B)$ dove $O \in I'(B)$, ovvero $B \in I(O)$. Il punto B è sulla stessa semiretta di $-A$, per cui, per l'unicità del trasporto, $B = -A$.

Proposizione 3.15. Se $A < B$ allora $-B < -A$.
Dim. La verifica è ovvia utilizzando l'assioma III3. Se $O \leq A < B$ allora $(-A, O) \equiv (O, A)$ e $(-B, O) \equiv (O, B)$ da cui $(-A, B) \equiv (-B, A)$ e per l'ipotesi segue $-B \leq -A$. Se $A \leq O \leq B$ la tesi discende banalmente da $-A \in I(O)$ e $-B \in I'(O)$. Se infine $A < B \leq O$ allora $(O, -A) \equiv (A, O)$ e $(O, -B) \equiv (B, O)$ da cui $(B, -A) \equiv (A, -B)$ perciò $-B \leq -A$.

Proposizione 3.16. Se $A < B$ allora $A + C < B + C$ per ogni $C \in$ L.
Dim. Poniamo $A + C = H$, $B + C = K$. Se $O \leq A < B$ valgono le congruenze $(O, A) \equiv (C, H)$ e $(O, B) \equiv (C, K)$ da cui $(O, C) \equiv (A, H)$ e $(O, C) \equiv (B, K)$ dunque $(A, H) \equiv (B, K)$ e poiché per ipotesi $A < B$ segue $H < K$. La verifica negli altri casi $A \leq O \leq B$ e $A < B \leq O$ è del tutto analoga.

Teorema 3.17. La struttura $(L, +)$ è di gruppo commutativo.
Dim. Ovvia per le proposizioni 3.11-3.14.

Proposizione 3.18. Sia $(A, B) \equiv (C, D)$. Allora $B + (-A) = D + (-C)$.
Dim. Se K è tale che $(O, K) \equiv (A, B) \equiv (C, D)$, valgono, per come è definita la somma, $K + A = B$ e $K + C = D$ da cui si ha, per le proprietà

di gruppo, $B + (-A) = K = D + (-C)$.

Definizione. Dati un punto A ed un naturale n, definiamo l'n-esimo "multiplo" nA come il punto:
i) $nA = O$ se $n = 0$;
ii) $nA = A$ se $n = 1$;
iii) $nA = A + A + \ldots + A$, cioé il punto ottenuto sommando n volte il punto A, se $n > 1$.

Corollario 3.19. Siano dati i punti A, B ed i naturali n, m. Valgono le seguenti proprietà:
a) $(m + n)A = mA + nA$; b) $m(nA) = (mn)A$; c) $n(A + B) = nA + nB$.
Dim. Le verifiche sono banali conseguenze della definizione di multiplo.

Proposizione 3.20. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Se $A < B$ allora $nA < nB$.
Dim. Per la proposizione 3.16 da $A < B$ seguono sia $A + A < A + B$ che $A + B < B + B$ sommando rispettivamente A e B. Per la transitività si ha $2A = A + A < B + B = 2B$ e iterando il ragionamento fino ai multipli n-esimi si ottiene la tesi.

Teorema 3.21. Sia dato $A \neq O$. Allora $N = \{B \in L \mid B = nA, n \in \mathbb{N}\}$ è isomorfo a $\mathbb{N}$.
Dim. La tesi è subito provata considerando l'applicazione $\phi : N \to \mathbb{N}$ definita ponendo $\phi(nA) = n$.

Definizione. Dati A ed un intero negativo $-n$, definiamo $-n(A) = n(-A)$. E' un semplice esercizio estendere la validità del corollario 3.19 ai numeri relativi.

Teorema 3.22. Sia dato $A \neq O$. L'insieme $Z = \{C \in L \mid C = nA, n \in \mathbb{Z}\}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Dim. La verifica è immediata considerando l'applicazione $\mu : Z \to \mathbb{Z}$ in cui $\mu(nA) = n$.

Definizione. Dati A, B ed un naturale non nullo n tali che $nA = B$, diciamo che A è l'n-esimo "sottomultiplo" del punto B. In simboli scriveremo $A = \frac{1}{n}B$.

Proposizione 3.23. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Si ha: $nA = nB$ se e solo se $A = B$.

Dim. Se $A = B$, per l'unicità del trasporto, si ottiene subito $nA = nB$. Sia invece $nA = nB$, con $n \neq 1$, poiché altrimenti la proposizione è ovvia. Se fosse $A \neq B$, ad esempio $A < B$, allora seguirebbero $2A < 2B$, …, $nA < nB$: assurdo. Allora deve essere $A = B$.
Ciò dimostra, se il naturale è non nullo, l'unicità del multiplo e del sottomultiplo (se esiste).

Corollario 3.24. Dato $n \in \mathbb{N}_0$, siano dati i punti A e B aventi l'n-esimo sottomultiplo. Allora:

a) $\frac{1}{n}(nA) = A = n\left(\frac{1}{n}A\right)$; b) $\frac{1}{n}(A + B) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B$.

Dim. La verifica della proprietà a) è banale. Denotiamo ora $\frac{1}{n}A = C$, $\frac{1}{n}B = D$ e sia $C + D = H$. Ne segue che:

$nH = n(C + D) = nC + nD = A + B$ da cui $H = \frac{1}{n}(A + B)$.

Teorema 3.25. Siano $A=\frac{1}{n}B$, $m\in \mathbb{N}$. Allora: $mA=m\left(\frac{1}{n}B\right)=\frac{1}{n}(mB)$.

Dim. La prima uguaglianza è ovvia. L'esistenza dell'n-esimo sottomultiplo di mB e la seconda uguaglianza derivano da $nA = B$, infatti: $mB = m(nA) = (mn)A = (nm)A = n(mA)$ ovvero $mA = \frac{1}{n}(mB)$.

Definizioni. Se A, B sono tali che $A = \frac{1}{n}B$, definiamo $\frac{m}{n}B = mA$.

Diremo che due punti C, D sono "commensurabili" se esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $D = qC$. L'insieme dei punti commensurabili con C è dato dunque da: $Q_C = \{D \in L \mid D = qU, q \in \mathbb{Q}\}$.

Corollario 3.26. Consideriamo due punti A, B aventi i sottomultipli secondo gli interi non nulli n, t. Valgono le seguenti proprietà:

a) $\frac{m}{n}(A+B)=\frac{m}{n}A+\frac{m}{n}B$; b) $\frac{m}{n}\left(\frac{s}{t}A\right)=\frac{ms}{nt}A$; c) $\left(\frac{m}{n}+\frac{s}{t}\right)A=\frac{m}{n}A+\frac{s}{t}A$.

Dim. Verifichiamo la proprietà a):

$\frac{m}{n}(A+B)=\frac{1}{n}(m(A+B))=\frac{1}{n}(mA+mB)=\frac{1}{n}(mA)+\frac{1}{n}(mB)=\frac{m}{n}A+\frac{m}{n}B$. La verifica delle proprietà b) e c) è del tutto analoga.

Corollario 3.27. Nelle ipotesi dell'esistenza dei sottomultipli di A utilizzati, vale $\frac{ms}{ns}A = \frac{m}{n}A$.

Dim. Ovvia per il punto b) del corollario precedente.

Osservazione. Per quanto visto la definizione di $\frac{m}{n}A$ acquista il significato di una moltiplicazione di un punto A per un numero razionale $\frac{m}{n}$.

4. Postulati di continuità

Gli assiomi di questo ultimo gruppo esprimono alcune caratteristiche generali di completamento della struttura di retta.

***Ass.* IV1**. (*Eudosso-Archimede*) Dati due segmenti qualsiasi (A, B), (C, D) è sempre possibile determinare un numero naturale n tale che il trasporto del segmento (A, B) reiterato n volte da C sulla semiretta passante per D, porta al di là del punto D.

Corollario 4.1. Dati due punti A, B in L tali che $O < A < B$ (rispettivamente $B < A < O$), esiste sempre un multiplo nA di A tale che $nA > B$ (rispettivamente $nA < B$.).
Dim. Se $O < A < B$ basta considerare i segmenti (O, A) e (O, B), se invece $B < A < O$ si considerano i segmenti (A, O) e (B, O). La verifica è banale applicando l'assioma IV1.

Definizione. Due classi non vuote S_1, S_2 di L si dicono una coppia di "classi contigue" se:
i) sono classi "separate", cioè ogni punto della prima classe è minore di ogni punto della seconda classe;
ii) Dato un segmento arbitrario (E_1, E_2) esiste un punto della prima classe H ed un punto della seconda classe K tali che (H, K) è congruente ad un sottoinsieme di (E_1, E_2).
Un punto D tale che nessun punto della prima classe è maggiore di D e nessun punto della seconda classe è minore di D, si dice "elemento di separazione".

Corollario 4.2. Siano date due classi contigue S_1, S_2 ed un generico punto $E > O$. Allora esistono $H \in S_1$, $K \in S_2$ tali che $K - H < E$.
Dim. Per la definizione di classi contigue dato un segmento arbitrario (E_1, E_2) esistono $H \in S_1$, $K \in S_2$ tali che (H, K) è congruente ad un sottoinsieme di (E_1, E_2). Poniamo allora $E_2 - E_1 = E$, prendiamo cioè il punto E tale che $(E_1, E_2) \equiv (O, E)$. Consideriamo inoltre il punto H_1 tale che $(H, K) \equiv (O, H_1)$ ovvero il punto $H_1 = K + (-H) = K - H$. Per via della congruenza si ha $(O, H_1) \subset (O, E)$ per cui $H_1 < E$.

***Ass.* IV2**. (*Cantor*) Ogni coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di L ha un elemento di separazione.

Proposizione 4.3. Una coppia di classi contigue S_1, S_2 di punti di L ha un unico elemento di separazione.
Dim. Siano A, A' due elementi separatori della coppia S_1, S_2 di classi contigue, con $A < A'$, e sia E un punto minore della loro differenza (la sua esistenza è assicurata dall'assioma II.3), cioè $E < A' - A$. Allora, presi due punti qualsiasi $A_1 \in S_1$, $A_2 \in S_2$, poiché $A_1 \leq A$, $A' \leq A_2$, segue $A_2 - A_1 > A' - A$ (per la prop. 3.7 e coroll.3.4), dunque $A_2 - A_1 > E$ ma ciò contrasta l'ipotesi che S_1, S_2 siano classi contigue.

Teroema 4.4. (*Teorema di Dedekind*) Sia data una partizione di L in due insiemi non vuoti S_1, S_2, in modo che nessun punto di S_1 stia tra due punti di S_2 e viceversa. Allora esiste un unico punto O tale che, presi qualsiasi $P_1 \in S_1$, $P_2 \in S_2$, con $P_1 \neq O \neq P_2$, si ha $P_1 < O < P_2$.
Dim. E' sufficiente dimostrare che la coppia S_1, S_2 è di classi contigue, in quanto l'esistenza dell'elemento separatore deriva, a quel punto, dall'assioma di Cantor.
Gli insiemi S_1, S_2 sono separati: se così non fosse, qualche punto di S_1 dovrebbe trovarsi tra due punti di S_2 e viceversa, contraddicendo in tal modo l'ipotesi del teorema.
Dato ora un punto $E > O$, siano $H_1 \in S_1$ $H_2 \in S_2$. Sia inoltre E' tale che $O < E' < E$. Per l'assioma archimedeo esiste un naturale n tale che il trasporto di (O, E') reiterato n volte da H_1 verso H_2 porti al di là del punto H_2, in altre parole si possono trovare dei punti E_i tali che:
$(O, E') \equiv (E_0, E_1) \equiv (E_1, E_2) \equiv \ldots \equiv (E_{n-1}, E_n)$ dove $E_0 = H_1$, $E_n > H_2$.
Tra questi segmenti ne esiste uno per il quale $E_{i-1} \in S_1$ ed $E_i \in S_2$, infatti gli E_i non possono appartenere tutti ad una sola parte in quanto $E_0 = H_1$, $E_n > H_2$, e non possono esistere $E_{j-1} \in S_2$ ed $E_j \in S_1$, per via delle ipotesi. Tale segmento, inoltre, deve essere unico poiché, altrimenti, detti (E_{k-1}, E_k), (E_{j-1}, E_j), con $k < j$, due segmenti che realizzano detta condizione, si avrebbero $E_k \in S_2$ ed $E_{j-1} \in S_1$ contro l'ipotesi che nessun punto di S_1 giace fra due punti di S_2. Dunque, se il segmento in questione è (E_{i-1}, E_i), segue che $E_i - E_{i-1} = E' < E$.

Teorema 4.4. (*Teorema di divisibilità*) Di ogni punto A in L esiste il sottomultiplo $\frac{1}{n}A$ secondo un qualsiasi numero naturale n non nullo.

Dim. Supponiamo $O < A$. Consideriamo, sul segmento (O, A), i sottinsiemi: $X_1 = \{P \in (O, A) \mid nP \leq A\}$, $X_2 = \{P \in (O, A) \mid A \leq nP\}$. La coppia X_1, X_2 forma una coppia di classi contigue, infatti:

- supponiamo esistano $P_1 \in X_1$ e $P_2 \in X_2$ tali che $P_1 > P_2$; per la prop. 3.20 si avrebbe $nP_1 > nP_2 > A$: assurdo. Dunque X_1 e X_2 sono classi separate;
- sia dato un generico punto $E > O$, siano $H_1 \in X_1$ e $H_2 \in X_2$. Sia inoltre E' tale che $O < E' < E$. Per l'assioma archimedeo esiste un naturale m tale che il trasporto di (O, E') reiterato m volte da H_1 verso H_2 porti al di là del punto H_2, in altre parole è possibile trovare dei punti E_i tali che $(O, E') \equiv (E_0, E_1) \equiv (E_1, E_2) \equiv \ldots \equiv (E_{m-1}, E_m)$ e dove $E_0 = H_1$, $E_m > H_2$. Tra questi segmenti ne esiste esattamente uno in cui $E_1 \in X_1$ e $E_2 \in X_2$ (la costruzione è identica a quella del teorema 4.4). Supponiamo che il segmento in questione sia (E_i, E_{i+1}), allora ne segue $E_{i+1} - E_i = E' < E$.

Per l'assioma IV2 la coppia X_1, X_2 ha un elemento separatore H che, soddisfacendo $H_1 \leq H \leq H_2$, soddisfa anche $nH_1 \leq nH \leq nH_2$.
Anche la coppia $S_1 = \{nH_1 \mid H_1 \in X_1\}$, $S_2 = \{nH_2 \mid H_2 \in X_2\}$ forma una coppia di classi contigue, infatti:

- sono classi separate, utilizzando la prop. 3.20 e il fatto che X_1 e X_2 sono separate;
- sia dato $E > O$, prendiamo un punto E' tale che $O < nE' < E$. Poiché esistono $F_1 \in X_1$, $F_2 \in X_2$ tali che $F_2 - F_1 < E'$, per tali punti si ha che $nF_1 \in S_1$, $nF_2 \in S_2$ ed anche $nF_2 - nF_1 = n(F_2 - F_1) < nE' < E$.

L'elemento separatore delle classi S_1, S_2 è il punto A, e poiché è unico, coincide con nH. Da ciò segue che il punto H è l'n-esimo sottomultiplo di A, in simboli: $H = \frac{1}{n}A$.

Corollario 4.5. Dati due punti A, B in L e diversi da O, esiste sempre un sottomultiplo dell'una minore dell'altra.
Dim. Supponiamo $O < A \leq B$ (il caso $B \leq A < O$ è analogo). Per l'assioma IV1 esiste un naturale n tale che $nA > B$, per il teorema di divisibilità esiste l'n-esimo sottomultiplo di B. Se fosse $A \leq (1/n)B$ allora $nA \leq n(1/n)B = B$ che è assurdo, per cui deve essere $A > (1/n)B$.

Corollario 4.6. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Se $nA = B$ allora $A = (1/n)B$.

Dim. Ovvia per il teorema 4.4 e la proprietà a) del corollario 3.24.

Teorema 4.7. Sia fissato un punto $U \neq O$. L'insieme dei punti commensurabili con U è isomorfo a $\mathbb{Q}$.

Dim. Consideriamo l'applicazione $\varphi : Q_U \to \mathbb{Q}$ così definita: $\varphi(U) = 1$, $\varphi((m/n)U) = m/n$. L'esistenza e l'unicità dei punti $(m/n)U$, al variare di m ed n, assicurano la suriettività e l'iniettività. Infine:

$$\varphi\left(\frac{m}{n}U + \frac{s}{t}U\right) = \varphi\left(\left(\frac{m}{n} + \frac{s}{t}\right)U\right) = \frac{m}{n} + \frac{s}{t} = \varphi\left(\frac{m}{n}U\right) + \varphi\left(\frac{s}{t}U\right).$$

5. L'isomorfismo con il campo ordinato dei reali

Definizione. Siano $A \in L$, $r \in \mathbb{R}$. Se consideriamo delle classi contigue X_1, X_2 di razionali aventi r come elemento separatore, anche le classi $S_1 = \{x_1A \mid x_1 \in X_1\}$, $S_2 = \{x_2A \mid x_2 \in X_2\}$ sono contigue di punti in L. Definiamo dunque rA come l'elemento separatore delle classi S_1, S_2 (per l'assioma IV2 e la proposizione 4.3 esiste ed è unico).

Proposizione 5.1. Sia dato $A \in L$, con $A \neq O$. Se $P \in L$ allora esiste un unico $r \in \mathbb{R}$ tale che $P = rA$.

Dim. Supponiamo che P ed A non siano commensurabili (altrimenti la verifica discende banalmente dalla definizione di commensurabilità). Se $A < P$ per l'assioma archimedeo IV1 esiste un naturale non nullo n tale che $(n\text{-}1)A \leq P < nA$. Consideriamo le classi $S_1 = Q_A \cap ((n\text{-}1)A, P)$, $S_2 = Q_A \cap (P, nA)$ di punti di L che risultano contigue ed hanno P come elemento separatore. Le classi ottenute attraverso l'applicazione φ di cui al teorema 4.7, cioè $\Sigma_1 = \{\varphi(P) \mid P \in S_1\}$ e $\Sigma_2 = \{\varphi(P) \mid P \in S_2\}$, sono classi contigue di razionali ed hanno un elemento separatore r nell'insieme dei reali. Allora, per come è definito, rA è l'elemento di separazione della coppia S_1, S_2, ma poiché tale elemento è unico, rA deve coincidere con P. Infine l'unicità segue dal fatto che il naturale n

che soddisfa $(n\text{-}1)A \le P < nA$ è unico, così come l'elemento separatore rA delle classi S_1, S_2 è unico.

Proposizione 5.2. Siano dati i punti A, B ed i reali p, r. Valgono le seguenti proprietà:
a) $(p + r)A = pA + rA$; b) $p(rA) = (pr)A$; c) $r(A + B) = rA + rB$.
Dim. Siano X_1, X_2 e Y_1, Y_2 due coppie di classi contigue razionali aventi come elementi separatori p ed r.
Verifichiamo la proprietà a). Le classi $Z_1 = \{x_1 + y_1 \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$, $Z_2 = \{x_2 + y_2 \mid x_2 \in X_2, y_2 \in Y_2\}$ sono anch'esse contigue ed hanno come elemento separatore $p + r$. Consideriamo perciò le due classi $Z_i' = \{(x_1+y_1)A \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$ e $Z_i'' = \{x_1A+y_1A \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$, i=1,2. L'elemento di separazione delle classi Z_1', Z_2' è $(p+r)A$, mentre quello delle classi Z_1'', Z_2'' è $pA+rA$, ma le due classi coincidono per la proprietà c) del corollario 3.26, e dunque si ha $(p+r)A = pA + rA$ per l'unicità dell'elemento separatore.
Verifichiamo la proprietà b). Le classi $W_1 = \{x_1y_1 \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$, $W_2 = \{x_2y_2 \mid x_2 \in X_2, y_2 \in Y_2\}$ sono contigue di elemento separatore pr. Consideriamo dunque le classi $W_i' = \{(x_1y_1)A \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$ e $W_i'' = \{x_1(y_1A) \mid x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1\}$, con i = 1, 2. L'elemento separatore delle classi W_i' è $(pr)A$ e quello delle classi W_i'' è $p(rA)$ ma le due classi coincidono per la proprietà b) del corollario 3.26 per cui si ha l'uguaglianza $(pr)A = p(rA)$ dell'elemento separatore.
La verifica della proprietà c) è analoga.

Proposizione 5.3. Sia $r \in \mathbb{R}_0^+$. Se $A < B$ allora $rA < rB$.
Dim. Siano X_1, X_2 classi contigue di razionali aventi r come elemento separatore. Consideriamo $S_1 = \{x_1A \mid x_1 \in X_1\}$, $S_2 = \{x_2A \mid x_2 \in X_2\}$ e $T_1 = \{y_1B \mid y_1 \in X_1\}$, $T_2 = \{y_2B \mid y_2 \in X_2\}$. Le classi S_1, S_2 sono classi contigue in L aventi rA come elemento separatore; le classi T_1, T_2 sono contigue ed hanno rB come elemento separatore. Dall'ipotesi $A < B$ seguono $x_1A < x_1B$ e $x_2A < x_2B$ per cui l'elemento separatore rA fra gli elementi del tipo x_1A, x_2A, è minore dell'elemento separatore rB fra gli elementi del tipo x_1B, x_2B: se così non fosse esisterebbero degli elementi x_1A, x_1B tali che $x_1A > x_1B$ contro l'ipotesi iniziale $A < B$.

Teorema 5.4. La struttura $(L, \leq, +)$ è isomorfa a $(\mathbb{R}, \leq, +)$.

Dim. Fissiamo un punto U e consideriamo l'applicazione $\psi : L \to \mathbb{R}$ definita ponendo: $\psi(U) = 1$, $\psi(rU) = r$. L'esistenza e l'unicità dei punti rU, al variare di r, assicurano la suriettività e l'iniettività dell'applicazione ψ. Infine, per la linearità:

$$\begin{aligned} \psi(X_1 + X_2) &= \psi(r_1U + r_2U) = \psi((r_1+r_2)U) = r_1+r_2 = \\ &= \psi(r_1U) + \psi(r_2U) = \psi(X_1) + \psi(X_2). \end{aligned}$$

Definizione. Fissiamo un elemento $U \in L$. Per la prep. 4.8, dati due qualsiasi punti A, B, esistono a, $b \in \mathbb{R}$ tali che $A = aU$, $B = bU$. Definiamo perciò un'operazione binaria di prodotto

$$\text{“} \cdot \text{”}: L \times L \to L \tag{2}$$

così definita: $A \cdot B = C$ dove $C = (ab)U$.

Proposizione 5.5. Valgono le seguenti proprietà:
a) il punto U è l'elemento neutro di “ · ”;
b) il punto O verifica $O \cdot A = A \cdot O = O$ per ogni punto A;
c) l'operazione “ · ” è associativa;
d) l'operazione “ · ” è commutativa;
e) l'operazione “ · ” è distributiva rispetto a “+”;

Dim. La verifica di a) è banale infatti, dato un generico punto $A = aU$, si ha subito:
$A \cdot U = aU \cdot 1U = aU = A$, $U \cdot A = 1U \cdot aU = aU = A$.
Per la proprietà b) si ha:
$O \cdot A = 0A \cdot A = (0 \cdot 1)A = 0A = O = \ldots A \cdot O$.
Siano inoltre $B = bU$, $C = cU$. Allora “ · ” è associativa:

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= (ab)U \cdot cU = (ab)cU = a(bc)U = \\ &= aU \cdot (bU \cdot cU) = A \cdot (B \cdot C) \end{aligned}$$

Così anche $A \cdot B = (ab)U = (ba)U = B \cdot A$. Infine:

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= (a + b)U \cdot cU = ((a + b) \cdot c)U = (ac + bc)U = \\ &= acU + bcU = (A \cdot C) + (B \cdot C). \end{aligned}$$

Proposizione 5.6. Se $O < A \leq B$ e $O < C < D$ allora $AC < BD$.
Dim. Siano $A = aU$, $B = bU$, $C = cU$, $D = dU$. Poiché $0U < aU \leq bU$ e $0 < cU < dU$ segue che $0 < a \leq b$ e $0 < c < d$ per cui $ac < bd$ e quindi $(ac)U < (bd)U$ ovvero la tesi.

Corollario 5.7. Sia $A \leq B$. Se $O < C$ allora $A \cdot C < B \cdot C$, se invece $C < O$ allora $A \cdot C < B \cdot C$.
Dim. Siano $A = aU$, $B = bU$, $C = cU$. Per ipotesi $aU \leq bU$ e $0U < cU$ ovvero $a \leq b$ e $0 < c$. Poiché vale $ac < bc$ la tesi è banale conseguenza.

Osservazione. Nella dimostrazione del corollario 5.7, così come in alcune altre di questo paragrafo, si è sfruttato l'isomorfismo fra le strutture additive di L ed $\mathbb{R}$ provato nel teorema 5.4, cioè trasportando alcune proprietà note dei reali. Tali verifiche si possono effettuare anche ignorando l'isomorfismo e ragionando soltanto sulle classi contigue di segmenti, ma questo porterebbe, di fatto, alle stesse conclusioni.

Definizione. Se $rA = B$, con $r \in \mathbb{R}_0$, scriveremo anche $A = \frac{1}{r}B$.

Corollario 5.8. Dati i punti A, $B \in L - \{O\}$, esiste un unico $r \in \mathbb{R}_0$ tale che $A = \frac{1}{r}B$.
Dim. Ovvia per la prop. 5.1.

Corollario 5.9. Se $rA = sB$ allora $A = \frac{1}{r}(sB) = s\left(\frac{1}{r}B\right) = \frac{s}{r}B$.
Dim. La verifica è immediata per il coroll. 5.8, il punto b) della prop. 5.2 e la prop. 5.5. Dunque la definizione di $\frac{s}{r}B$ acquista il significato di una moltiplicazione tra un punto B e un numero reale $\frac{s}{r}$.

Proposizione 5.10. Ogni $A \in L - \{O\}$ ha il punto inverso rispetto alla operazione di prodotto: se $A = aU$ allora $A^{-1} = \frac{1}{a}U$.
Dim. Si prova facilmente che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = U$.

Corollario 5.11. La struttura $(L - \{O\}, \cdot\,)$ è di gruppo commutativo. Dunque $(L, \leq)$ è un campo ordinato.
Dim. Ovvia per le prop. 5.5 e 5.10.

Definizione. Siano $A \in L$, $B \in L - \{O\}$. Attraverso la prop. 5.10 si può definire una nuova operazione di "divisione" fra tali punti. Definiamo tale operazione "÷" nel seguente modo: $A \div B = A \cdot B^{-1}$.
Dunque se $A = aU$, $B = bU$, si ha $A \div B = aU \cdot \frac{1}{b}U = \frac{a}{b}U$.

Teorema 5.12. La struttura $(L, \cdot\,)$ è isomorfa a $(\mathbb{R}, \cdot\,)$.
Dim. Per provare l'isomorfismo fra le strutture moltiplicative verifichiamo che la restrizione $\rho : L - \{O\} \to \mathbb{R}_0$ dell'applicazione ψ (definita nel teorema 5.4) è un isomorfismo. Poiché ψ è una biezione, tale è anche ρ inoltre, per la linearità si ha:

$$\begin{aligned}\rho(X_1 \cdot X_2) &= \rho(r_1U \cdot r_2U) = \rho((r_1 \cdot r_2)U) = r_1 \cdot r_2 = \\ &= \rho(r_1U) \cdot \rho(r_2U) = \rho(X_1) \cdot \rho(X_2).\end{aligned}$$

Corollario 5.13. La struttura $(L, \leq)$, dotata delle operazioni di somma (1) e prodotto (2), è isomorfa al campo ordinato dei reali $(\mathbb{R}, \leq)$.

Bibliografia

[1] Peano G. (1889), I Principii di Geometria logicamente esposti, da *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. II, 59-78
[2] Peano G. (1894), Sui Fondamenti della Geometria, tratto da *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, 115-157
[3] Pasch M. (1882), Vorlesungen über neuere Geometrie, Lipsia

[4] Morin U., Busulini F. (1966), *Elementi di Geometria per le Scuole Medie Superiori*, Quarta edizione, Cedam, Padova

[5] Hilbert D. (1970), *Fondamenti della Geometria*, traduzione di Pietro Canetta dall'opera G*rundlagen der Geometrie* (1889), Feltrinelli, Milano

[6] Manara C. F. (1991), Giuseppe Peano ed i Fondamenti della Geometria, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 171-184

[7] Marchi M. (1991), L'Opera di Peano e la moderna Geometria di Incidenza, in: *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Mucchi, Modena, 197-212

[8] Freguglia P. (1977), Osservazioni inerenti alla Geometria sulla retta di G. Peano, *Archimede*, 2, 95-103

[9] Eugeni F., Furneri S., Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in: *Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1999*, Edigrafital, Teramo, 101-111

[10]Eugeni F., Mascella R. (2002), La Retta Euclidea Reale a partire da una relazione d'ordine, in corso di stampa su: *Periodico di Matematiche*, nr. 2-3