

Un piano non archimedeo derivato da un piano di traslazione

Franco Eugeni¹, Raffaele Mascella²

Sunto: In questo lavoro viene costruito un modello di piano reale, nel quale ogni retta è non archimedeo, derivante da un piano di traslazione desarguesiano. Modificando la genesi del piano di traslazione si ottiene anche un modello di piano reale non archimedeo e non desarguesiano.

Parole Chiave: Geometria non Archimedeo, Fibrazioni, Piano di traslazione.

1. Preliminari

E' ben conosciuto il modello di Veronese di retta non archimedeo ed alcuni studi connessi (cfr. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]).

In un precedente lavoro [10] il modello classico di Veronese è stato rivisitato come struttura numerica su $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Nelle ricerche seguenti, riportate peraltro in questo libro (cfr. in questo volume la sezione sulla retta non archimedeo), abbiamo generalizzato il precedente modello in un modello generalizzato che dipende da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e da una direzione P_∞

fissata in un tale piano affine. Alla coppia $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, P_\infty)$ possiamo associare la cosiddetta “costruzione standard di una retta non archimedeo”. In questo lavoro utilizziamo questa costruzione e

¹ Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: eugenif@tin.it

² Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: rmascella@tin.it

partendo da un piano di traslazione reale si costruisce un piano nel quale ogni retta è non archimedeana.

2. L'idea base della costruzione

Sia $P = PG(4, \mathbb{R})$ un spazio proiettivo 4-dimensionale su $\mathbb{R}$.

Premettiamo qualche richiamo.

Una fibrazione F di rette su uno spazio proiettivo S è un insieme di rette tali che:

- i) le rette di F sono a due a due sghembe;
- ii) l'unione delle rette è S .

Osservazione. E' noto che ogni spazio proiettivo di dimensione dispari possiede una fibrazione (totale) F .

Definizione. Sia H un iperpiano di P , da chiamarsi "iperpiano improprio", e supponiamo che F sia una fibrazione (totale) di rette su H . Inoltre denotiamo con L l'insieme dei piani propri in P che contengono una retta di F . Tali piani si dicono "piani caratteristici".

Definizione. Consideriamo la struttura (A, L) nel modo seguente:

- 1) $A = P - H$, e gli elementi di A sono chiamati A -punti;
 - 2) $L = \{\alpha - (\alpha \cap H) \mid \alpha \in L\}$, e gli elementi di L sono chiamati L -rette.
- E' ben noto che la coppia (A, L) è un piano affine.

Se fissiamo un punto (proiettivo) in ogni retta della fibrazione F allora, in ogni piano caratteristico, rimane fissata una direzione, in altre parole su ogni retta di L si può dare una struttura di retta non archimedeana (cfr. in questo volume la sezione sulla retta non archimedeana).

Definizione. Una fibrazione F tale che in ogni sua retta, $l \in F$, è fissato un punto, diciamo $x \in l$, si chiama “fibrazione puntata” e si denota con F^* .

Il modello di piano non archimedeo (A, L) , definito sopra, dipende dalla fibrazione puntata F^* . Così, se F^* e G^* sono due fibrazioni puntate, il gruppo degli automorfismi da A in se stesso contiene tutte le proiettività che soddisfano le seguenti:

- 1) H è trasformato in H ;
- 2) la fibrazione F è trasformata nella fibrazione G ;
- 3) ogni x fissato su $l \in F^*$ è trasformato nel punto u fissato sulla retta $g \in G^*$, dove g è la retta corrispondente della retta l .

Non è semplice caratterizzare questi gruppi di automorfismi di A .

Osservazioni. Ricordiamo che, fissando tre rette di F , possiamo considerare la quadrica rigata Q definita dalle rette che intersecano ciascuna delle tre rette in esattamente un punto.

Ogni quadrica rigata è, come ben noto, doppiamente rigata nel senso che su di essa sono costruibili due fibrazioni in rette che si chiamano i “regoli” della quadrica. Due rette del medesimo regolo sono tra loro sghembe, due rette di regoli diversi sono incidenti in esattamente un punto. Data una quadrica rigata secondo una famiglia di rette (o regolo) R_1 e considerate tre rette sghembe appartenenti ad R_1 , la famiglia di rette in cui ciascuna retta incide ognuna delle tre rette date in esattamente un punto è il secondo regolo della quadrica che, nel nostro caso, denoteremo con R_2 . Dunque a partire da uno dei regoli (diretto) posso generare da tre sue rette il secondo regolo (inverso) ed ottenerli in tal modo entrambi.

E’ ben noto che una fibrazione F di H è detta “fibrazione regolare” se è soddisfatta la seguente condizione:

comunque prese tre rette di F , il regolo R_1 , contenente le tre rette date, è contenuto in F .

E' ben noto dalla letteratura classica che il piano (A, L) costruito da una fibrazione F è desarguesiano o non desarguesiano a seconda che F sia regolare o no (cfr. [8]).

3. Esempi numerici

Denotiamo con $(x_i)_{i=0,1,\dots,4}$ le coordinate proiettive in $PG(4, \mathbb{R})$. Sia $x_0 = 0$ l'equazione dell'iperpiano improprio H . Supponiamo che la fibrazione F in H sia la famiglia di rette date dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} cx_1 = ax_3 + bx_4 \\ cx_2 = bx_3 - ax_4 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove, per ogni punto (c, a, b) di $PG(2, \mathbb{R})$ abbiamo una retta di F . Fissiamo un piano α su H attraverso la retta l_0 ottenuta ponendo $c = 0$, ovvero la retta: $x_3 = x_4 = x_0 = 0$. Tale piano α ha equazione (per esempio) $x_4 = x_0 = 0$.

Il piano α interseca ogni retta $l(a, b)$ di $F - \{l_0\}$ esattamente nel punto $P(a, b) = (0, a, b, c, 0) \approx (0, a/c, b/c, 1, 0) \in l(a, b)$, con $c \neq 0$. Come punto della retta l_0 possiamo scegliere il punto $P_0 = (0, 1, 0, 0, 0) \in l_0$. Così quando consideriamo un piano caratteristico in P , questo è il piano rappresentato dal sistema seguente:

$$\begin{cases} cx_1 = ax_3 + bx_4 + \lambda x_0 \\ cx_2 = bx_3 - ax_4 + \mu x_0 \end{cases} \quad (2)$$

dove le coordinate $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, con $x_0 \neq 0$, possono essere lette anche come le coordinate affini $X_i = x_i / x_0$ di $A = P - H$.

In ognuno di questi piani

$$\alpha(a,b) = \begin{cases} cX_1 = aX_3 + bX_4 + \lambda \\ cX_2 = bX_3 - aX_4 + \mu \end{cases} \quad (3)$$

rimane fissato il punto $(0, a, b, c, 0)$ se $c \neq 0$, il punto $P_0 = (0,1,0,0,0)$ sulla retta l_0 se $c = 0$. Così, in ogni piano caratteristico (nel quale è fissata una direzione), cioè in ogni L -retta di (A, L) , possiamo dare una costruzione standard di retta non archimedeana.

Per esempio, nel piano $\alpha(0,0)$ dato dal sistema

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

il punto fissato è $(0,0,0,1,0)$ che, in termini di “idee intuitive” dà luogo esattamente al modello di Veronese generalizzato di retta non archimedeana, isomorfo al modello costruito su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cfr. la sezione sulla retta non archimedeana in questo volume)

4. Il rovesciamento dei regoli

Interpretiamo le coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) come le coordinate proiettive nell'iperpiano H di equazione $x_0 = 0$. Fissiamo tre rette della fibrazione F in H , precisamente quelle date dai seguenti sistemi:

$$l_0 = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad l(0,0) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad l(1,1) = \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases} \quad (5)$$

Per costruire il regolo delle rette che si appoggiano a queste rette, fissiamo un punto V variabile in $l(1,1)$, le cui coordinate sono del tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (u+v, u-v, u, v)$ e costruiamo i due piani contenenti rispettivamente l_0 e $l(0,0)$, e il punto V . Al variare di u, v si ottiene la famiglia di rette di equazioni:

$$\begin{cases} vx_3 - ux_4 = 0 \\ (u - v)x_1 - (u + v)x_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

costituente uno dei regoli (R_2) della quadrica Q della quale le (6) sono le equazioni parametriche generalizzate e la cui espressione cartesiana risulta essere:

$$x_1x_3 = x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 \quad (7)$$

E' facile verificare che una retta di F appartiene alla quadrica Q se e solo se è soddisfatta la seguente condizione:

$$a = b \quad (8)$$

Così il regolo R_1 contenente le tre rette $l_0, l(0,0), l(1,1)$ è rappresentato dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} cx_1 = a(x_3 + x_4) \\ cx_2 = a(x_3 - x_4) \end{cases} \quad (9)$$

Ora siamo in grado di dare una nuova fibrazione F' che non è una fibrazione regolare. Tale fibrazione F' si ottiene effettuando, a livello di insiemi, la seguente operazione

$$F' = (F - R_1) \cup R_2 \quad (10)$$

per cui la fibrazione F' è rappresentata dai seguenti:

$$\begin{cases} cx_1 = ax_3 + bx_4 \\ cx_2 = bx_3 - ax_4 \end{cases} \quad \text{se } a \neq b \quad (11)$$

$$\begin{cases} vx_3 = ux_4 \\ (u - v)x_1 = (u + v)x_2 \end{cases} \quad \text{se } a = b \quad (12)$$

in cui le (11) rappresentano le rette appartenenti a $F - R_1$, mentre le (12) rappresentano le rette appartenenti a R_2 .

Su ognuna di queste rette possiamo scegliere un punto, per esempio il punto intercettato dal piano di H dato da $x_4 = 0$ e così

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (u + v, u - v, 0, 0)$$

Ora, partendo da F' , possiamo ripetere la costruzione standard per ottenere un modello di piano non archimedeo e non desarguesiano.

Bibliografia

- [1] Levi-Civita T. (1893), Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, in: Atti R. Ist. Veneto di Sci. Lett. Ed Arti, vol. VII, 4, 1765-1815
- [2] Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. VI, 2° Sem., 161-167
- [3] Levi-Civita T. (1898), Sui numeri transfiniti, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 1° Sem., 113-121
- [4] Veronese G. (1898), Segmenti e numeri transfiniti, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. VII, 1° Sem., 161-167
- [5] Bindoni A. (1902), Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. XI, 2° Sem., 205-209
- [6] Veronese G. (1905), La geometria non Archimedeana. Una questione di priorità, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. XIV, 1° Sem., 347-351
- [7] Veronese G. (1908), La geometria non Archimedeana, in: *Atti del 4° congresso internaz. dei Matematici*, Roma, vol. I, 197-208
- [8] Cerasoli M., Eugeni F., Protasi M. (1988), *Elementi di Matematica Discreta*, Zanichelli, Bologna
- [9] Di Leonardo, Marino, Spagnolo F. (1994), Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato di Eudosso-

Archimede ed il metodo di Esaustione, *La Matematica e la sua didattica*, nr. 1, 25-37

- [10] Eugeni F., Furneri S., Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in: *Atti del Congresso Nazionale della Mathesis 1999*, Edigrafital, Teramo, 101-111
- [11] Spagnolo F. (1999), A theoretical-experimental model for research of epistemological obstacles, in: *International Conf. on Mathematics Education into the 21st Century*, Cairo (Egitto)
- [12] Eugeni F., Mascella R. (2000), La Retta Euclidea Reale a partire da una relazione d'ordine, accettato per la pubblicazione: *Periodico di Matematiche*, nr. 3