

Una fondazione del metodo delle coordinate al lume di ricerche del XX secolo secondo le idee del programma di Erlangen (*)

Carla FIORI (°) e Consolato PELLEGRINO (^)

Sommario. – All’Università, negli ultimi decenni, la Geometria è presentata come un capitolo dell’Algebra lineare. Ciò, inevitabilmente, comporta che la cultura geometrica e l’intuizione spaziale siano sempre più carenti anche tra le nuove generazioni di laureati in Matematica, il che a sua volta comporta una ricaduta negativa sulla qualità dell’insegnamento e sul valore formativo della Matematica. È importante quindi fornire una idea dei legami esistenti tra l’approccio sintetico e quello analitico alla Geometria. In questa nota presentiamo una via molto generale che, tenendo conto degli sviluppi del pensiero geometrico nel corso degli ultimi due secoli, consente di passare dall’una all’altra impostazione. Detto procedimento, che non dipende né dagli assiomi dell’ordine né da quelli di congruenza (e che, quindi, non è necessariamente collegato al campo dei numeri reali), dà la possibilità di estendere ad una vasta classe di piani (che comprende il piano euclideo) le nozioni di similitudine e di isometria e di individuarne e caratterizzarne le equazioni.

Abstract. – In the last decades, university teaching has introduced Geometry as a chapter of Linear Algebra. This implies that geometrical culture and spacial intuition are more and more lacking in the new generations of graduated in Mathematics, which of course has a negative feedback on the quality of mathematics teaching and its educational value. So it is important to show the links existing between the synthetic and the analytic approach to the geometry. In this paper we offer a very general way that, bearing in mind the development of geometrical thought in the last two centuries, allows to shift from one setting to the other. Such procedure, which doesn’t depend on the axioms of order nor on those of congruence (and which therefore is not necessarily linked to the field of real numbers), allows to extend to a wide class of planes (including the Euclidean one) the notions of similitude and isometry and to find out and characterize their equations.

* Lavoro eseguito nell’ambito delle attività finanziate dal CNR.

° Dip. ECONOMIA POLITICA - Università, MODENA • e-mail: fiori@unimo.it.

^ Dip. MATEMATICA - Università, MODENA • e-mail: pellegrino@unimo.it.

Sembrerebbe un paradosso, ma non lo è: alzando troppo il livello dell'insegnamento [della Geometria], il prodotto – cioè quello che gli studenti effettivamente acquisiscono – diminuisce, anzi, oltre un certo limite di difficoltà crolla «verticalmente» [...]

Un approccio multiforme e graduale dava invece la possibilità agli studenti di entrare (o di avanzare) nella comprensione della Geometria, e di formarsi delle basi utili sia per corsi più specialistici nel secondo biennio, sia per capire la Matematica elementare «dall'alto».

Francesco SPERANZA (1988, p. 13)

Le idee matematiche hanno origine a livello empirico... Ma una volta che esse sono state concepite in questo modo, l'argomento comincia a vivere di vita propria e viene paragonato con maggiore facilità a qualcosa di creativo, governato quasi del tutto da motivazioni estetiche [...]

Mentre si diffonde, o dopo numerosi incroci «astratti», la disciplina matematica rischia la degenerazione [...] qualora si raggiunga tale stadio, l'unico rimedio mi sembra essere il ritorno rivivificante alla fonte: una nuova introduzione di idee più o meno direttamente empiriche.

John von NEUMANN (1947, ed. 1961, p. 9)

0. – INTRODUZIONE

Gli *Elementi* di Euclide, il più antico trattato di *geometria razionale* (o *sintetica*) che ci è pervenuto, è del III sec. a.C. Negli *Elementi* le varie proposizioni geometriche (i *teoremi*) vengono dedotte a partire da cinque proposizioni primitive (i *postulati* o *assiomi*) ⁽¹⁾.

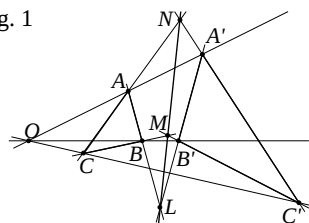
Nella prima metà del XVII secolo, ad opera di Pierre de Fermat (1601-1665) e di René Descartes (Cartesio: 1596-1650), nasce il *metodo delle coordinate* che consente di applicare i metodi dell'algebra alla soluzione dei problemi geometrici.

Nel 1822, con un trattato di Jean-Victor Poncelet (1788-1867), nasce la *geometria proiettiva*, di fatto già presente negli studi sulla prospettiva e sulle coniche (*cfr.* ad es. *tav.* 1) di Girard Desargues (1591-1661) nonché nel trattato sulle coniche del suo discepolo più brillante, Blaise Pascal (1623-1662).

¹ Euclide distingue il termine postulato da quello di assioma: con il primo indica proposizioni di contenuto prettamente geometrico e con il secondo proposizioni di carattere più generale quali ad es. "*somme di cose uguali sono uguali*". Oggi i due termini sono considerati come sinonimi. Ai due termini però, dopo la rivoluzione non euclidea e l'opera di Hilbert, si possono dare connotazioni un po' diverse, al primo *semantica* ed al secondo *sintattica*. Con un tale atteggiamento, si usa il termine *postulato* per la formulazione di una proprietà di enti concreti (o presunti tali) che si vogliono inquadrare in una teoria, mentre il termine *assioma* si utilizza per la proprietà di enti astratti sui quali si vuole fondare una teoria.

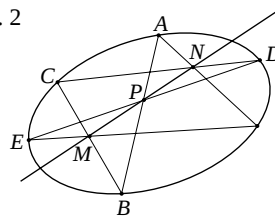
Teorema dei Triangoli Omologici di Desargues (1639). – Dati due triangoli ABC ed $A'B'C'$ se le rette AA' , BB' , CC' , passano per uno stesso punto O ; allora i punti d'intersezione delle rette AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$, stanno tutti su una stessa retta. Viceversa, se i punti d'intersezione delle rette AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, AC e $A'C'$, stanno tutti su una stessa retta; allora le rette AA' , BB' , CC' , passano per uno stesso punto (fig. 1).

Fig. 1



Teorema di Pascal (1640). – Se i vertici di un esagono $ABCDEF$ stanno su di una conica; allora i punti M , N e P intersezione delle tre coppie di lati opposti dell'esagono stanno tutti su una stessa retta. Viceversa, se i punti M , N e P , intersezione delle tre coppie di lati opposti di un esagono stanno tutti su una stessa retta; allora i vertici dell'esagono stanno su una conica, che può anche degenerare in due rette (fig. 2). ⁽²⁾

Fig. 2



Tra il 1826 ed il 1830 Nikolai Lobacevskij (1793-1856) e János Bolyai (1802-1860), indipendentemente l'uno dall'altro, negando il quinto postulato (che richiede l'unicità della parallela ad una retta che passa per un punto esterno ad essa), introducono la cosiddetta *geometria non euclidea* (oggi detta anche geometria iperbolica: cfr. ad es. Agazzi e Palladino, 1998, p. 155 e segg. oppure Trudeau, trad. ital. 1991, p. 191 e segg.) in cui ci sono più parallele ad una retta passanti per un punto esterno ad essa.

Nel 1848, Karl Georg von Staudt (1797-1867), allievo di Gauss, abbandona il metodo di deduzione metrico-proiettivo ed utilizza la nozione di birapporto per dare un indirizzo autonomo e puramente sintetico, indipendente dal concetto di distanza, alla geometria proiettiva. ⁽³⁾

² In effetti un caso particolare della parte inversa di questo teorema (vedi più avanti) era già presente nelle *Collezioni Matematiche* di Pappo di Alessandria (IV sec. d.C.) più noto per alcuni teoremi sull'area ed i volumi dei solidi di rivoluzione, riscoperti da Paul Guldin (Guldino: 1577-1643).

³ Una sistemazione critica dell'opera di von Staudt si trova in un volume di F. Enriques del 1898 che, oltre a varie edizioni e numerose ristampe in italiano (l'ultima è del 1996), ha avuto una traduzione in tedesco nel 1903 (voluta da F. Klein), una francese nel 1930 ed una litografata in inglese per gli studenti delle università americane.

Nel 1854 Bernard Riemann (1826-1866), un altro allievo di Gauss, abbandonando il postulato di prolungabilità della retta (il secondo in Euclide), introduce la *geometria ellittica* in cui non esiste alcuna parallela ad una retta passante per un punto esterno ad essa ⁽⁴⁾.

Nel 1872 Felix Klein (1849-1925) presenta il suo famoso programma (*Programma di Erlangen*: cfr. Klein, 1872, nuova trad. ital. 1998) in cui utilizza il concetto di gruppo di trasformazioni per unificare e classificare le geometrie euclidea ⁽⁵⁾, proiettiva, dei raggi reciproci (cfr. Klein, *op. cit.*, pp. 67-70) ⁽⁶⁾,

Nello stesso anno, Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916), indipendentemente l'uno dall'altro, colmano una delle più profonde lacune dell'impostazione euclidea emerse nel tempo, fornendo due diverse formulazioni del postulato di continuità (cfr. Frajese, 1972). ⁽⁷⁾

Nel 1899, David Hilbert (1862-1943) pubblica i *Grundlagen der Geometrie* (cfr. trad. ital. 1970) con cui fonda la geometria su venti assiomi suddivisi in cinque gruppi costituiti da: otto assiomi di collegamento, quattro di ordine, cinque di congruenza, uno di parallelismo, due di continuità. Dall'ordine in cui si susseguono i suddetti gruppi (i cui assiomi sono presentati tutti insieme in uno stesso paragrafo) si comprende che la strutturazione dei *Grundlagen* rispecchia sostanzialmente la tradizione euclidea. In particolare in Hilbert, come in Euclide:

- 1) l'esistenza della parallela ad una retta passante per un punto esterno, che negli *Elementi* è la proposizione 31 (cfr. ad es. Agazzi e Palladino, 1998, p. 51), è dimostrata sfruttando la nozione di congruenza (cfr. Hilbert, *op. cit.*, p. 29);
- 2) l'assioma di prolungamento delle rette (in Hilbert incluso tra gli assiomi di ordine) precede l'assioma di parallelismo.

Queste due scelte sono in sintonia con l'obiettivo di fondare la geometria euclidea su un sistema di assiomi che consenta di:

⁴ Ricordiamo che l'assioma che assicura la non esistenza di parallele è incompatibile con quello di prolungabilità della retta (cfr. Agazzi e Palladino, 1998, pp. 251-255).

⁵ In effetti (cfr. Klein, *op. cit.*, p. 56) Klein parla di geometria ordinaria che identifica con la geometria simile.

⁶ Questa geometria, che è anche detta *anallagmatica* (perché conserva l'ampiezza degli angoli), è collegata alle trasformazioni per raggi vettori reciproci e, in particolare nel piano, alla inversione circolare (cfr. ad es. Courant e Robbins, 1941, trad. ital. 2000, pp. 195-219).

⁷ Le due formulazioni non sono equivalenti. In effetti l'assioma di Dedekind è equivalente alla congiunzione degli assiomi di Cantor e di Eudosso-Archimede (cfr. ad es. Agazzi e Palladino, 1978, p. 110 e segg.).

[continua a pag. 5]

Tavola 2

LE GEOMETRIE AFFINE, SIMILE ED EUCLIDEA NELL'OTTICA DEL PROGRAMMA DI ERLANGEN

Bisogna però tenere presente che un argomento matematico non può mai essere considerato esaurito fino a quando non è diventato intuitivamente evidente e che procedere analiticamente significa compiere un passo importantissimo ma solo un primo passo.

Felix KLEIN

Si usa chiamare *Programma di Erlangen* la dissertazione che nel 1872 F. Klein presenta in occasione della sua nomina, a soli 23 anni, alla cattedra di geometria dell'Università di Erlangen rimasta vacante dalla morte di von Staudt, avvenuta cinque anni prima.

Il Programma accentra la sua attenzione sul concetto di *eguaglianza* in geometria. Secondo Klein, nella geometria ordinaria, due figure sono eguali se una delle due coincide con l'immagine dell'altra mediante un elemento del gruppo principale (gruppo delle similitudini dirette e inverse: *cfr.* nota 5). Da qui l'idea che ogni geometria può essere caratterizzata da un gruppo di trasformazioni. In questa ottica le *geometria affine* ⁽⁸⁾, *simile* (o *della forma*) e *metrica* sono caratterizzate rispettivamente dai gruppi A delle affinità, S delle similitudini ed I delle isometrie.

Accanto al concetto di *eguaglianza*, fondamentale è per Klein il concetto di *proprietà geometrica invariante* (o più semplicemente *invariante*) rispetto ad un gruppo G , ossia di *proprietà che è conservata da ciascun elemento di G* . È interessante notare che le inclusioni tra i gruppi di trasformazioni da una parte e quelle tra i corrispondenti insiemi di invarianti dall'altra sono ribaltate, nel senso che ad un *ampliamento* del gruppo di trasformazioni corrisponde una *riduzione* del relativo insieme di invarianti. Ad esempio la congruenza (dei segmenti e degli angoli) e la stessa ampiezza (degli angoli) sono proprietà invarianti della geometria simile, mentre quella di lunghezza (dei segmenti) no. Infatti le similitudini trasformano segmenti congruenti in segmenti congruenti, angoli congruenti in angoli congruenti, un angolo qualunque in un angolo ad esso congruente, ma in genere non trasformano un segmento in un segmento ad esso congruente. In questo modo la geometria collegata ad H è una generalizzazione di quella collegata a G . Pertanto, essendo $I \subset S \subset A$, la geometria euclidea è più ricca della geometria simile e questa è più ricca di quella affine. ⁽⁹⁾

⁸ Nel Programma di Erlangen, Klein non parla di Geometria affine. Essa però era già stata messa in luce da Leonhard Euler (Eulero: 1707-1783), nel suo *Geometricorum difficillimorum* (1765), e da August Ferdinand Möbius (1790-1868) con il suo *Der barycentrische Calcul* (1827).

⁹ Questa gerarchia è sottolineata dagli strumenti caratteristici di dette geometrie: *i)* la riga e la squadra, non necessariamente con un angolo retto, caratterizzano la geometria affine (la riga consente di tracciare la retta passante per due punti, la squadra e la riga consentono di tracciare la parallela ad una retta passante per un punto esterno ad esso); *ii)* la riga e la squadra con un angolo retto caratterizzano la geometria simile (questi strumenti, oltre alle precedenti operazioni, consentono

[continua da pag. 3]

- emendarla dalle varie *assunzioni nascoste*;
- provarne la *coerenza*.⁽¹⁰⁾

Queste scelte, però, oggi si prestano a qualche critica. La prima scelta porta a un conflitto tra i *Grundlagen* ed il *Programma di Erlangen*. In effetti nel primo l'esistenza della parallela dipende dagli assiomi di congruenza mentre nel secondo, come illustrato nella *tav. 2*, la nozione di parallelismo è più generale di quella di congruenza: il parallelismo è un invariante affine, la congruenza è un invariante per similitudini. La seconda scelta invece impone l'infinità dei punti della retta sin dalle prime battute e ciò può indurre, o rafforzare, l'idea che le nozioni di congruenza (che nei *Grundlagen* è un termine primitivo) e di ortogonalità, ma anche di similitudine ed isometria, siano legate in modo indissolubile, con i numeri reali ed il loro ordinamento.

A cento anni dai *Grundlagen*, adesso che:

- gli sviluppi della matematica hanno mostrato l'ampia portata del *Programma di Erlangen* e l'importanza delle strutture *matematiche finite*;
- il teorema di Kurt Gödel, del 1931, ha minato alla base il *programma hilbertiano* di autofondazione della matematica (*cfr.* ad es. Shanker, 1988, trad. ital. 1991; oppure Hersh, 1997, trad. ital. 2001, pp. 253-262).

è interessante prendere in considerazione sistemi di assiomi più deboli di quello dei *Grundlagen*. In particolare è utile vedere cosa accade se:

- svincoliamo il parallelismo dalla nozione di congruenza;
- rinunciamo agli assiomi dell'ordine e di continuità.

Ad esempio, se ci limitiamo a considerare un sistema ipotetico deduttivo basato su:

- un assioma che accorpa i *primi due assiomi di collegamento* di Hilbert (che richiede contemporaneamente l'esistenza e l'unicità della retta passante per due punti: *cfr.* Hilbert, *op. cit.*, p. 4);
- il cosiddetto *assioma della parallela forte* (che, oltre all'unicità, richiede l'esistenza della parallela: *cfr.* Hilbert, *op. cit.*, p. 85);

ad es. di tracciare la perpendicolare ad una retta passante per un punto); *iii*) la riga ed il compasso caratterizzano la geometria euclidea (questi strumenti, oltre alle precedenti operazioni, consentono ad es. il trasporto dei segmenti). Quanto detto riguarda solo un giudizio relativo sull'utilizzo dei suddetti strumenti. Invece per quanto riguarda l'effettiva impossibilità di realizzare certe costruzioni con certi strumenti rinviando a Castelnuovo 1927 (rist. 1987) e Enriques 1927 (rist. 1987).

¹⁰ Hilbert, che puntava ad una autofondazione della matematica, in effetti nei *Grundlagen* si limita a dare una prova relativa di coerenza del suo sistema di assiomi costruendo un modello di piano basato sul campo dei numeri reali.

- un indebolimento del *terzo assioma del gruppo di collegamento* (che richiede l'esistenza di tre punti che non stanno su una stessa retta ma non che su ogni retta ci siano almeno due punti: cfr. Hilbert, *op. cit.*, p. 4); ⁽¹¹⁾

otteniamo (cfr. § 1) una struttura molto semplice che è detta *piano affine* in quanto ammette come modello il piano affine ordinario. Si potrebbe obiettare che tale struttura è poco interessante perchè:

- 1) troppo “esotica” in quanto ammette modelli finiti;
- 2) troppo “povera” in quanto, a differenza di quanto avviene per il piano affine ordinario, non dà né la possibilità di utilizzare il metodo delle coordinate né di caratterizzare le nozioni di ortogonalità e congruenza;
- 3) se vogliamo utilizzare il metodo delle coordinate o introdurre e caratterizzare le nozioni di ortogonalità e congruenza, possiamo seguire l'*impostazione algebrica*, oggi prevalente nei corsi di Geometria all'Università, in cui i piani (e gli spazi) affini (o proiettivi), in genere, sono caratterizzati a partire da spazi vettoriali su un campo $\mathbf{K}$, mentre il piano (e lo spazio) ordinario è caratterizzato introducendo la metrica euclidea nel piano (rispettivamente nello spazio) affine sul campo $\mathbf{R}$ dei numeri reali.

Ma i precedenti punti (1), (2) e (3), più che rappresentare un limite, per noi rappresentano una sfida ed un vantaggio. La sfida consiste nel seguire la via inversa a quella algebrica in cui, senza far dipendere a priori la nozione di piano da quella di spazio vettoriale e senza cortocircuitare il metodo sintetico o l'intuizione spaziale, si assumono come assiomi, accanto a quelli di piano affine, alcuni teoremi della geometria euclidea, in modo da ottenere una struttura, nel seguito detta di *piano formalmente euclideo*, in cui sia possibile:

- a) introdurre un *sistema di riferimento* che consenta di individuare un campo $\mathbf{K}$ che funga da *insieme delle coordinate* atte a rappresentare sia i punti del piano sia le equazioni delle rette nonché quelle delle affinità; ma anche:
- b) caratterizzare (rispettando la gerarchia tra le geometrie affine, simile, metrica) le nozioni di *ortogonalità* (delle rette) e *congruenza* (dei segmenti);
- c) definire le nozioni di *similitudine* ed *isometria*;
- d) esplicitare le condizioni analitiche che consentono di caratterizzare sia le nozioni di *ortogonalità* e di *congruenza*, sia quelle di *similitudine* ed *isometria*;

¹¹ Grazie all'assioma della parallela forte è possibile dimostrare che su ogni retta ci sono almeno due punti.

- e) stabilire quando le equazioni delle affinità e le condizioni citate al punto precedente coincidono con quelle valide nel piano euclideo. Il vantaggio è che vincendo questa sfida si individua una geometria che generalizza la geometria euclidea e che, pur essendo molto vicina ad essa, è coerente proprio perché ammette modelli finiti. Di più, vincendo la sfida, evidenzieremo i limiti della impostazione algebrica e così scopriremo che:
- non tutti i piani affini possono essere coordinatizzati a partire da un campo (o da un corpo) κ ;
 - è riduttivo ricondurre la nozione di affinità a quella di applicazione lineare.

Facendo nostra la constatazione di Francesco Speranza e seguendo l'invito, generale e non particolarmente accentrato sulla geometria, di Jhon von Neumann, da noi citati all'inizio di questo articolo, mostriamo come sia possibile vincere la suddetta sfida. Più precisamente nel § 1, riprendendo quanto illustrato in Fiori e Pellegrino (1995 e 1996), illustriamo come sia possibile raggiungere l'obiettivo (a) avvalendosi di risultati di un filone di studi e ricerche ⁽¹²⁾ nell'ambito dei fondamenti della geometria aperto da considerazioni di Hilbert (*cfr. op. cit., capp. 3 e 5*) sul *teorema di Desargues* (dei triangoli omologici) e sul *teorema di Pappo-Pascal* (il primo dei quali è valido in un qualunque piano, affine o proiettivo, costruito a partire da un corpo κ mentre il secondo è valido solo se κ è commutativo). Successivamente, nei §§ 2 e 3 indicheremo un modo, da noi già prefigurato in Fiori e Pellegrino (2000), per raggiungere i rimanenti obiettivi (b-e) postulando l'esistenza di *quadrato* o, più semplicemente, di un "triangolo rettangolo isoscele" ⁽¹³⁾ e fissando un "segmento unitario". Così proveremo che per caratterizzare il piano (ma anche lo spazio) euclideo e per realizzare il collegamento tra geometria sintetica, analitica e delle trasformazioni non è necessario passare attraverso il campo dei numeri reali.

¹² Il primo di questi studi, che riguarda la coordinatizzazione del piano proiettivo, risale a Marshall Hall (1943).

¹³ Questa idea non sorprende se si considera che: i) la restituzione prospettica consente di realizzare rilievi territoriali o architettonici a partire da una fotografia o da una prospettiva in cui è individuabile la rappresentazione di un quadrato (*cfr. ad es. Pellegrino et Alii, 1999, p. 78 e segg.*); ii) molte costruzioni eseguibili con la riga ed il compasso possono essere eseguite con la sola riga adoperando, ove occorra, un quadrato o qualche altra figura "fondamentale" tracciata sul foglio da disegno (*cfr. Giacomini, 1927, rist. 1987*).

1. – PIANI AFFINI ED AFFINITÀ

Dato un insieme non vuoto P , i cui elementi sono detti punti, ed un insieme R di sottoinsiemi non vuoti di P , i cui elementi sono detti rette, si dice che $\pi = (P, R)$ è un *piano affine* (o più semplicemente *piano*) se soddisfa i seguenti assiomi:

- A) *Due qualsiasi punti distinti appartengono ad una ed una sola retta.*
- B) *Per ogni retta r e per ogni punto P esiste una ed una sola retta r' passante per P e parallela ad r (due rette r ed r' si dicono parallele se $r = r'$ oppure $r \cap r' = \emptyset$).*
- C) *Esistono almeno tre punti non appartenenti alla stessa retta.*

Le rette di π hanno tutte la stessa cardinalità che se finita, come accade ad esempio nel caso dei piani costruiti a partire da un campo finito, è detta *ordine* di π . La relazione di parallelismo, indicata con “ $\parallel$ ”, è una relazione di equivalenza le cui classi sono dette *direzioni*. Come d’uso, diremo *allineati* punti che appartengono ad una medesima retta ed indicheremo con AB la retta individuata dai punti A e B , ecc.

Dati due piani affini $\pi = (P, R)$ e $\pi' = (P', R')$, si dice che una biiezione σ di P in P' è una *affinità* di π in π' se l’immagine di una qualunque retta di π è una retta di π' .

Dalla precedente definizione segue che una affinità manda rette parallele in rette parallele e che le affinità di un piano in sé stesso formano un gruppo. Ovviamente *una affinità manda punti allineati in punti allineati*, ma si può dimostrare che vale anche il viceversa.

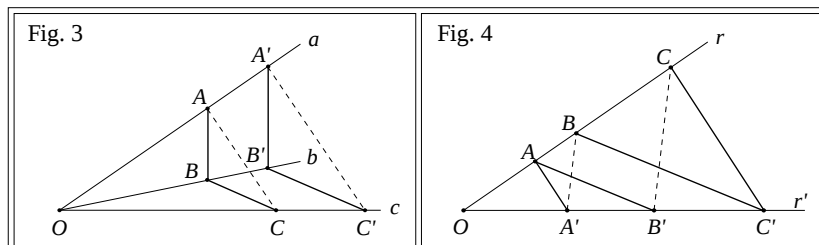
Si dice che un piano affine π è *desarguesiano* se vale il seguente assioma (fig. 3):

- D) *Qualunque siano i triangoli ABC ed $A'B'C'$ se le rette AA' , BB' , CC' , sono distinte e si incontrano in uno stesso punto (o sono parallele), si ha che se $AB \parallel A'B'$ e $BC \parallel B'C'$; allora $AC \parallel A'C'$.⁽¹⁴⁾*

Si dice che un piano affine π è *pappiano* se vale il seguente assioma (fig. 4):

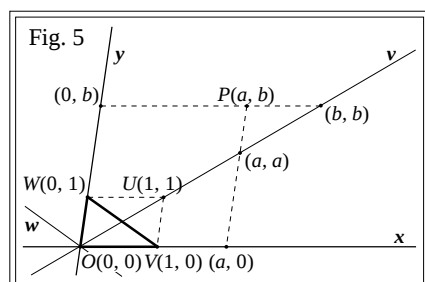
- P) *Qualunque siano le rette r ed r' che si intersecano in un punto O ed i punti A, B, C ed A', B', C' , rispettivamente su r ed r' , distinti tra loro e da O , si ha che se $AA' \parallel CC'$ e $AB' \parallel BC'$; allora $BA' \parallel CB'$.*

¹⁴ A partire da **D** si può dimostrare il suo inverso. Hilbert, nei *Grundlagen*, dà un esempio di piano non desarguesiano. Nello spazio, invece, **D** vale sempre: è una conseguenza degli assiomi di collegamento (cfr. Hilbert e Cohn-Vossen, 1932, ed. ital. 1991, pp. 161-162).



Si dice che un piano affine desarguesiano π è *staudtiano* se soddisfa il seguente assioma:

S) Ogni affinità di π in sé avente tre distinte direzioni unite, conserva la direzione delle rette.



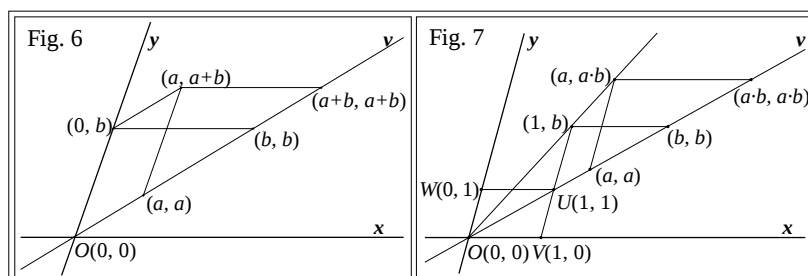
Per introdurre un sistema di riferimento in un piano affine π basta fissare una terna (O, V, W) di suoi punti non allineati (fig. 5): il punto O fungerà da *origine*, la retta $x = OV$ fungerà da *asse delle ascisse*, la retta $y = OW$ da *asse delle ordinate*, il punto U d'intersezione della parallela all'asse x passante per W con

la parallela all'asse y passante per V fungerà da *punto unità*. Nel seguito chiameremo *bisettrice principale* la retta $v = OU$ e *bisettrice secondaria* la retta w passante per O e parallela alla retta VW .

L'insieme delle coordinate di un piano affine π è un insieme κ di simboli, fra cui "0" ed "1", in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta v tale che O ed U siano rispettivamente i corrispondenti di 0 ed 1.

Preso un punto P di π se $P \in v$ e P è il corrispondente di $x \in \kappa$, allora a P si assegnano le coordinate (x, x) . Ovviamente O avrà coordinate $(0, 0)$ ed U avrà coordinate $(1, 1)$. Se invece (fig. 5) $P \notin v$ e le coordinate dei punti di intersezione di v con le rette passanti per P e parallele agli assi y ed x sono (a, a) e (b, b) rispettivamente, allora a P si assegnano le coordinate (a, b) . Per quanto detto i punti V e W hanno rispettivamente coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Presi due elementi $a, b \in \kappa$ si definisce *somma* di a e b (fig. 6), e la indicheremo con $a+b$, l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per $(0, b)$ e parallela a v con la retta passante per (a, a) e parallela all'asse y .



Presi due elementi $a, b \in \kappa - \{0\}$ si definisce *prodotto* di a e b (fig. 7), e lo indicheremo con $a \cdot b$ (o anche con ab), l'ordinata del punto di intersezione della retta passante per l'origine O e per il punto $(1, b)$ con la retta passante per (a, a) e parallela all'asse y . A completamento della precedente definizione si pone $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in \kappa$.

Riguardo alla coordinatizzazione dei piani affini valgono le seguenti due proposizioni:

Teorema 1 (cfr. ad es. Segre 1948, ed. 1961, p. 167). – Se π è un piano affine desarguesiano la terna $(\kappa, +, \cdot)$ è un corpo, che ha 0 ed 1 rispettivamente come elementi neutri della somma e del prodotto, e questo corpo, che è unico a meno di isomorfismi, è commutativo se π è pappiano.

Teorema 2 (cfr. ad es. Segre 1948, ed. 1961, p. 200). – Un piano staudtiano π risulta pappiano ed il campo κ ad esso associato è privo di automorfismi non identici. Viceversa se un piano affine è coordinatizzabile sopra un campo κ privo di automorfismi non identici, esso è staudtiano.

Il piano affine ordinario (in cui κ coincide con il campo dei reali) è staudtiano mentre il piano complesso non lo è. Invece il piano costruito a partire dal campo $GF(p^k)$ di caratteristica p , con p primo, è staudtiano se e solo se $k = 1$.

La caratteristica del corpo κ associato a π è detta *caratteristica del piano*. La caratteristica di π è due se e solo se la bisettrice principale v coincide con quella secondaria w (fig. 5). In un piano affine π pappiano si ha che per quanto riguarda punti e rette valgono le usuali condizioni e risultati di geometria analitica. In particolare:

1.1) Tre punti distinti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$, sono *allineati* se e solo se

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

- 1.2) Una retta r può essere rappresentata mediante una *equazione* del tipo $ax+by+c=0$ con $a, b, c \in \kappa$ e con a e b non contemporaneamente nulli. ⁽¹⁵⁾

Invece per quanto riguarda la rappresentazione delle affinità di π c'è qualche differenza:

- 1.3) Le equazioni di una affinità σ sono

$$\begin{cases} x' = a\vartheta(x) + b\vartheta(y) + p \\ y' = c\vartheta(x) + d\vartheta(y) + q \end{cases} \quad (\text{con } \Delta = ad-bc \neq 0)$$

ove $a, b, c, d, p, q \in \kappa$ e ϑ è un automorfismo di κ .

- 1.4) L'equazioni della inversa σ^{-1} di σ sono

$$\begin{cases} x = \vartheta^{-1}\left(\frac{dx' - by' - pd + bq}{\Delta}\right) \\ y = \vartheta^{-1}\left(\frac{ax' - cy' - qa + pc}{\Delta}\right) \end{cases} \quad (\text{con } \Delta = ad-bc \neq 0)$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano pappiano π (qualunque sia la sua caratteristica):

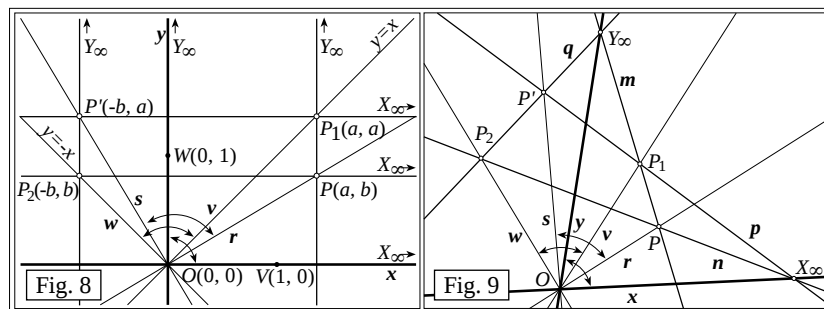
- la condizione di allineamento e la rappresentazione delle rette coincidono con quelle del piano affine ordinario;
- la rappresentazione delle affinità coincide con quella del piano affine ordinario se e solo se π è stautiano.

Nei prossimi paragrafi mostremo come nei piani affini pappiani, postulando l'esistenza di un "triangolo rettangolo isoscele" (e senza l'ausilio di altri assiomi), sia possibile *definire* e *caratterizzare analiticamente* le nozioni di ortogonalità, congruenza, similitudine ed isometria (cfr. nota 13).

Definizione. – Chiamiamo piano affine marcato una terna $\pi^* = (P, R, T)$ tale che (P, R) è un piano affine pappiano e $T = (O, V, W)$ è una terna fissata di punti non allineati di π^* .

Nel seguito, come sistema di riferimento di un piano marcato π^* considereremo sempre il sistema di riferimento ottenuto a partire dalla terna T .

¹⁵ Gli assi x ed y hanno rispettivamente equazione $y=0$ e $x=0$. Le bisettrici principale, v , e secondaria, w , hanno rispettivamente equazione $y=x$ ed $y=-x$.



2. – ORTOGONALITÀ E SIMILITUDINI

Per introdurre in un piano marcato $\pi^* = (P, R, T)$ la relazione di ortogonalità tra le rette postuliamo che:

T) T sia un “triangolo rettangolo isoscele” (ossia che x è ortogonale a y e che la bisettrice principale v è ortogonale alla bisettrice secondaria w ⁽¹⁶⁾);

e cominciamo con il definire l’ortogonalità fra le rette del fascio Φ_O di centro O :

Definizione. – Siano r, s due rette del fascio Φ_O (fig. 8), diciamo che r è *ortogonale ad* s e scriveremo $r \perp s$, se preso un punto P di r distinto da O ed indicati con:

- P_1 il punto di intersezione di v con la retta per P parallela all’asse y ;
- P_2 il punto di intersezione di w con la retta per P parallela all’asse x ;
- $P^\perp$ il punto d’intersezione della parallela ad x passante per P_1 con la parallela ad y passante per P_2 ;

si ha che $P^\perp \in s$. ⁽¹⁷⁾ ⁽¹⁸⁾

Dalla precedente definizione, considerata la reversibilità della costruzione che porta da P a $P^\perp$, segue che l’ortogonalità è una involuzione

¹⁶ Ricordiamo che nel piano euclideo un triangolo, quale è OVW (cfr. fig. 5), è isoscele se e solo se il parallelogramma $OVUW$ è un quadrato ossia se in esso sono ortogonali tra loro rispettivamente due lati consecutivi e le due diagonali.

¹⁷ Questa definizione è suggerita dalle proprietà metriche dei gruppi armonici (cfr. Enriques 1920^{IV}, pp. 66-68) e dal teorema del quadrilatero completo di Desargues (cfr. Op. cit., pp. 152-154), infatti le tre coppie (X_∞, Y_∞) , (P_1, P_2) , (P, P') , dei vertici opposti del quadrilatero completo formato dalle rette m, n, p, q , sono proiettate dalle tre coppie di rette (x, y) , (v, w) , (r, s) (fig. 9). Per provare che la definizione è ben posta basta verificare, utilizzando l’assioma **D**, che la retta s non dipende dalla scelta del punto P .

¹⁸ Facciamo notare che se $v = w$, e solo in questo caso, la costruzione di $P^\perp$ coincide con la costruzione che, nel piano euclideo, consente di costruire il simmetrico di un punto rispetto a v .

tra le rette di Φ_O e ciò comporta che per ogni retta r passante per O esiste in Φ_O una ed una sola retta s tale che $s \perp r$ ed $r \perp s$.

Dal momento che il punto $P(b, -a)$ sta sulla retta $r: ax+by=0$ e che $P^\perp$ risulta avere coordinate (a, b) , si ha che:

2.1) Due rette $r_1: a_1x+b_1y=0$ ed $r_2: a_2x+b_2y=0$, passanti per l'origine, sono *ortogonali* se e solo se $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Analogamente due rette $r_1: y=m_1x$ ed $r_2: y=m_2x$ sono *ortogonali* se e solo se $m_1m_2=-1$.

Diciamo che una retta è *isotropa* se essa è ortogonale a sé stessa.

Da quanto detto se π^* ha caratteristica due allora ha come unica retta isotropa la bisettrice principale v (che, in questo caso, coincide con w). Considerato che nel piano reale non vi sono rette isotrope e che, invece, nel piano complesso ce ne sono due è lecito chiedersi:

- quando accade che π^* ha delle rette isotrope?
- quante possono essere le rette isotrope di π^* ?

Dalla condizione di ortogonalità tra rette non parallele all'asse y (cfr. 2.1) ⁽¹⁹⁾ si ha che in π^* esistono rette isotrope se e solo se esiste un $m \in \kappa$ tale che $m^2 = -1$. ⁽²⁰⁾

Di conseguenza π^* ha al più due rette isotrope. Questo risultato è in accordo con il fatto che nel piano reale (o complesso) una involuzione tra gli elementi di una forma di prima specie può avere al più due elementi uniti (cfr. ad es. Enriques 1920^{IV}, pp. 148).

Estendiamo ora l'ortogonalità a tutte le rette di π^* :

Definizione. – Diciamo che due rette r ed s di π^* sono *ortogonali* se e solo se lo sono le loro parallele passanti per O .

In un piano marcato π^* , come nel piano euclideo, risulta che:

2.2) Due rette $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ed $r_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ sono ortogonali se e solo se $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Definizione. – Una affinità σ di π^* è una *similitudine* se manda rette ortogonali in rette ortogonali ossia se qualunque siano le rette r, s di π^* si ha che $r \perp s$ implica $\sigma(r) \perp \sigma(s)$.

Dalla condizione (2.2) di ortogonalità delle rette segue che:

¹⁹ Essendo gli assi x e y distinti ed ortogonali tra loro le eventuali rette isotrope sono diverse da y .

²⁰ Nei campi finiti $GF(p^k)$, $p \neq 2$, esiste un m tale che $m^2 = -1$ se e solo se $p^k \equiv 1 \pmod{4}$ e quindi nel piano affine costruito a partire da $GF(p^k)$ ci sono due rette isotrope se $p^k \equiv 1 \pmod{4}$, ce n'è una se $p = 2$ e non ce ne sono se $p \neq 2$ e $p^k \equiv 3 \pmod{4}$.

2.3) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una similitudine è che

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + b^2 = b^2 + d^2 \end{cases} \quad (21)$$

che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, essendo $ad-bc \neq 0$, è equivalente a

$$\begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}$$

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano marcato π^* (qualunque sia la sua caratteristica):

- la condizione di ortogonalità delle rette coincide con quella del piano euclideo; ⁽²²⁾
- la rappresentazione delle similitudini coincide con quella del piano euclideo se e solo se π^* è staudtiano. ⁽²³⁾

3. – CONGRUENZA ED ISOMETRIE

Al fine di semplificare il seguito di questa esposizione diamo le definizioni di “segmento”, di “parallelogramma”, di “rombo” e, a partire da O (primo elemento della terna T) introduciamo una struttura di gruppo definendo nell’insieme dei punti di π^* (mediante le regole del parallelogramma e del doppio parallelogramma) una operazione, “ $\oplus$ ”, di addizione.

Qualunque siano i punti A e B di un piano affine π chiamiamo *segmento*, di *primo estremo* A e *secondo estremo* B , la coppia (A, B) che, per comodità, indicheremo con $[A, B]$. Qualunque siano i punti A, B, C, D , di un piano affine π , a tre a tre non allineati e quindi distinti, diciamo che la quaterna (A, B, C, D) è un *parallelogramma*, e lo indicheremo con $[A, B, C, D]$, se $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$. ⁽²⁴⁾

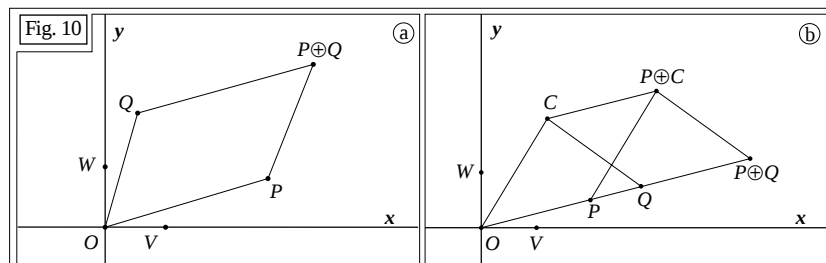
Diciamo che un parallelogramma $[A, B, C, D]$ di π^* è un *rombo* se le rette AC e BD sono ortogonali tra loro.

²¹ La parte sufficiente è una conseguenza delle (1.4) e del fatto che $x \perp y$ e $v \perp w$.

²² È una conseguenza della (2.2).

²³ È una conseguenza della (2.3) e del teorema 1.2.

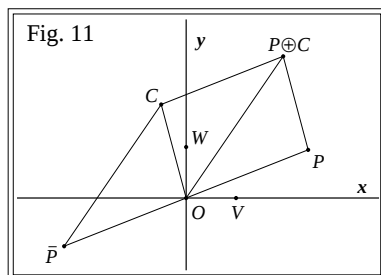
²⁴ Qualunque siano i punti A, B, C, D , se (A, B, C, D) è un parallelogramma; allora lo sono anche (B, C, D, A) , (A, D, C, B) , ecc. Inoltre se A, B, C , sono tre punti non allineati di π , esiste esattamente un punto X di π tale che (A, B, C, X) è un parallelogramma.



Presi due punti P e Q di π^* distinti da O , definiamo *somma* di P e Q , che indicheremo con $P \oplus Q$, il punto X se:

- O, P, Q , non sono allineati e la quaterna (P, O, Q, X) è un parallelogramma (fig. 10a);
- O, P, Q , sono allineati, C è un punto non appartenente alla retta $OP (= OQ)$ e la quaterna $(P \oplus C, C, Q, X)$ è un parallelogramma (fig. 10b). ⁽²⁵⁾

A completamento della precedente definizione poniamo, qualunque sia il punto P di π^* , $O \oplus P = P \oplus O = P$ (da quanto detto segue che O è elemento neutro per l'operazione " $\oplus$ ").



L'insieme dei punti di π^* è un gruppo abeliano rispetto all'operazione $\oplus$: l'opposto $\bar{P}$ di P è il punto X di π^* tale che preso un punto C non appartenente alla retta OP si ha che $(O, P \oplus C, C, X)$ è un parallelogramma (fig. 11). ⁽²⁶⁾

Analogamente a quanto fatto per l'ortogonalità fra rette daremo la definizione della relazione, " $\equiv$ ", di

congruenza tra segmenti in due tempi. Per cominciare diamo la definizione di congruenza fra segmenti aventi il primo estremo in O .

Definizione. – Siano P_1 e P_2 due punti di π^* (non necessariamente distinti) diciamo che i segmenti $[O, P_1]$ e $[O, P_2]$ sono *congruenti*, e scriveremo $[O, P_1] \equiv [O, P_2]$, se è soddisfatta una delle seguenti condizioni ⁽²⁷⁾:

- ²⁵ Dall'assioma **D** segue che questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C .
- ²⁶ Dall'assioma **D** segue che anche questa definizione è ben posta perché indipendente dalla scelta di C .
- ²⁷ Questa definizione si ispira al fatto che nel piano euclideo due segmenti aventi uno estremo in comune sono congruenti se e solo se o coincidono, o sono opposti, oppure sono due lati consecutivi di un rombo.

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ P_1 &= \bar{P}_2 \\ O(P_1 \oplus P_2) &\perp O(P_1 \oplus \bar{P}_2) \end{aligned}$$

Dalla precedente definizione segue che in π^* :

3.1) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si ha che

$$[O, P_1] = [O, P_2] \text{ se e solo se } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2. \quad (28)$$

Estendiamo ora la relazione di congruenza a tutti i segmenti di π^* .

Definizione. – Qualunque siano i punti P_1, P_2, P_3, P_4 , diciamo che

$$[P_1, P_2] = [P_3, P_4] \text{ se e solo se } [O, P_2 \oplus \bar{P}_1] = [O, P_4 \oplus \bar{P}_3].$$

In un piano marcato π^* , come nel piano euclideo, risulta che:

3.2) Qualunque siano i punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$

$$[P_1, P_2] = [P_3, P_4] \text{ se e solo se } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2$$

che, nel caso in cui la caratteristica di π^* sia due, è equivalente a

$$[P_1, P_2] = [P_3, P_4] \text{ se e solo se } x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_3 + x_4 + y_3 + y_4.$$

3.3) La congruenza fra i segmenti è una relazione di equivalenza.

Definizione. – Una affinità σ di π^* è una *isometria* se qualunque siano i punti P, Q di π^* si ha che $[\sigma(P), \sigma(Q)] = [P, Q]$.

Dalla condizione di congruenza (3.2) dei segmenti segue che:

3.4) Condizione necessaria affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} 2(ab + cd) = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ \vartheta(x^2) = x^2 \end{cases} \quad (29) \quad (30) \quad (31).$$

²⁸ Se la caratteristica di π^* è due la condizione diviene $[P_1, P_2] = [P_3, P_4]$ se e solo se $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = x_3 + x_4 + y_3 + y_4$.

²⁹ La parte sufficiente segue dal fatto che $[\sigma(V), \sigma(W)] = [V, W]$, $[\sigma(O), \sigma(V)] = [O, V]$, $[\sigma(O), \sigma(W)] = [O, W]$ e che per ogni $x \in \mathbf{K}$, considerato il punto $P(0; x)$, si ha che $[\sigma(O), \sigma(P)] = [O, P]$.

È facile verificare che vale anche il viceversa di (3.4) e quindi:

3.5) Condizione necessaria e sufficiente affinché una affinità σ di π^* in sé di equazioni (1.3) sia una isometria è che

$$\begin{cases} ab+cd=0 \\ a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ \vartheta=id_K \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \\ \vartheta=id_K \end{cases}$$

a seconda che la caratteristica γ di π^* sia diversa o uguale a due.

Riassumendo quanto detto in questo paragrafo si ha che in un piano marcato π^* :

- la condizione di congruenza dei segmenti coincide con quella del piano euclideo; ⁽³²⁾
- la rappresentazione delle isometrie coincide con quella del piano euclideo;
- se la caratteristica $\gamma \neq 2$ oppure $K = GF(2)$, analogamente a quanto avviene nel piano euclideo, le isometrie sono similitudini; ⁽³³⁾
- se $\gamma = 2$ e $K \neq GF(2)$, a differenza di quanto avviene nel piano euclideo, esistono isometrie che non sono similitudini. ⁽³⁴⁾

³⁰ La quarta equazione è equivalente a $\vartheta = id_K$: se $\gamma \neq 2$ ciò è una conseguenza della eguaglianza $\vartheta(x+1)^2 = (x+1)^2$ altrimenti è conseguenza del fatto che $x = -x$.

³¹ Se $\gamma = 2$ la prima equazione è una identità, mentre la seconda e la terza si riducono a $a+c=1, b+d=1$.

³² È una conseguenza della (3.2).

³³ È una conseguenza della (3.5) e del teorema 1.1: se $\gamma \neq 2$ è immediato; se $\gamma = 2$ e $K = GF(2)$ basta osservare che in tal caso, e solo in esso, $ad-bc \neq 0$ è equivalente a $ad+bc=1$ che combinato con le (3.5) comporta che $ab+cd=0$.

³⁴ Ad esempio fissato in K un elemento ε diverso da 0 ed 1, basta osservare che l'applicazione di π^* in sé di equazioni

$$\begin{cases} x' = (1 + \varepsilon)x + y \\ y' = \varepsilon x \end{cases}$$

è una isometria ma non una similitudine.

4. – CONCLUSIONI

Il presente studio ci ha permesso di evidenziare analogie e differenze tra il piano euclideo ed un piano marcato π^* . In particolare dalle analogie è emerso che *i piani formalmente euclidei sono tutti e soli i piani staudtiani* mentre dalle differenze è emerso che *nei piani di caratteristica due non staudtiani, e che quindi hanno più di quattro punti, esistono isometrie che non sono similitudini*.

Concludendo rileviamo che, a differenza di quanto appare da altre trattazioni, i piani veramente “esotici” non sono i piani finiti e nemmeno quelli che, come il piano complesso, hanno due rette isotrope ma quelli, finiti o no, che hanno una sola retta isotropa ed hanno più di quattro punti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- AGAZZI E. e PALLADINO D., 1978, *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della Geometria*, EST Mondadori, Milano, pp. 318
- AGAZZI E. e PALLADINO D., 1998, *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della Geometria dal punto di vista elementare*, Ed. La Scuola, Brescia, pp. 342
- CASTELNUOVO G., 1927, Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli strumenti elementari: contributo della Geometria analitica, in ENRIQUES, 1927^{III}, *quivi*, vol. II, parte II, pp. 231-262
- COURANT R. e ROBBINS H., 1941, *What Is Mathematics? An elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford Univ. Press, New York, (trad. ital. 2000 della II ediz. curata da I. Stewart, *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 672)
- ENRIQUES F., 1898, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna, pp. IX+379 (1904^{IV}, rist. 1996, pp. X+422)
- ENRIQUES F. (a cura di) 1927^{III}, *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, Zanichelli, Bologna, pp. IX+379 (rist. 1987, 2 voll., pp. 1116)
- ENRIQUES F., 1927, Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali e sulla costruibilità dei poligoni regolari, in ENRIQUES, 1927^{III}, *quivi*, vol. II, parte II, pp. 263-305
- FIORI C. e PELLEGRINO C., 1995, Teoremi configurazionali e coordinatizzazione di piani affini, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 4, pp. 431-445
- FIORI C. e PELLEGRINO C., 1996, Alla ricerca delle Affinità perdute, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 1, pp. 46-56

- FIORI C. e PELLEGRINO C., 1999, Piani formalmente euclidei, *Riv. Mat. Univ. Parma*, n. 3, pp. 199-213
- FRAJESE A., 1972, Il primo centenario del postulato di continuità, *Archimede*, n. 3-4, pp. 123-128
- GIACOMINI A., 1927, Sulla risoluzione dei problemi geometrici colla riga e cogli strumenti lineari: contributo della Geometria proiettiva, in ENRIQUES, 1927^{III}, *quivi*, vol. II, parte II, pp. 181-230
- HALL M., 1943, Projective planes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 54, Bologna, pp. 229-277
- HERSH R., 1997, *What Is Mathematics, Really?* (trad. ital. 2001, *Cos'è davvero la Matematica*, Baldini e Castoldi, Milano, pp. 494)
- HILBERT D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig/Berlin (trad. ital. 1970^x, *Fondamenti di Geometria*, Feltrinelli, Milano, pp. XXVI+274)
- HILBERT D. e COHN-VOSSEN S., 1932, *Anschauliche Geometrie*, Springer Verlag, Berlin (ed. ital. 1991, *Geometria Intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 512)
- KLEIN F., 1872, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrischen Forschungen* (nuova trad. ital. 1998, *Programma di Erlangen*, con una Introduzione di E. AGAZZI ed un Quadro storico-biografico di A. BERNARDO, Ed. La Scuola Brescia, pp. 96)
- NEUMANN J. (VON), 1947, The Mathematician, in HEYWOOD R.B. (ed.), *Works of the Mind*, University Chicago Press, Chicago, (ripubblicato, nel 1961, in *JHON NEUMANN - Collected Works*, vol. 1, pp. 1-9)
- PELLEGRINO C. et ALII, 1999, *La Prospettiva dal punto di vista della Geometria – Per vedere di là della siepe che da tanta parte dell'ultimo orizzonte il guardo esclude*, Pitagora Editrice, Bologna, pp. 120
- SEGRE B., 1948, *Lezioni di Geometria Moderna*, Zanichelli, Bologna, vol. 1, pp. 196 (trad. inglese ampliata 1961, *Lectures on Modern Geometry*, Ed. Cremonese, Roma, pp. 480)
- SHANKER G.H. (a cura di), 1988, *Gödel's Theorem in focus*, Croom Helm Ltd., London (trad. ital. 1991, *Il teorema di Gödel: una messa a fuoco*, Franco Muzzio ed., Padova, pp. 324)
- SPERANZA F., 1988, Salviamo la Geometria!, *La Matematica e la sua Didattica*, n. 2, pp. 6-14 (ripubblicato, nel 1999, sulla stessa rivista, n. 1, pp. 5-16)
- TRUDEAU R., 1987, *The non-Euclidean revolution*, Birkhäuser, Boston (trad. ital. 1991, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 280)

