

Introduzione alla teoria dei sistemi

1^a parte

Ennio Cortellini, Franco Eugeni¹

“....Mi sembrava infatti che avrei potuto riconoscere molte più verità nei ragionamentiil cui esito può subito dopo punirlo se egli ha fatto difetto di giudizio, che non nei ragionamenti compiuti nel chiuso del suo studio da un uomo di lettere che specula su questioni che non producono alcun effetto e la cui unica conseguenza non sarà forse altra se non che egli ne trarrà tanta maggiore vanità quanto più esse saranno lontane dal senso comune, dato che avrà dovuto impegnare tanto maggiore impegno ed artificio per renderle verosimili.”

Cartesio – Discorso sul metodo

“La misura in cui le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe. E nella misura in cui sono certe, non si riferiscono alla realtà.”

A.Einstein – Geometry and Experience

Sunto: Vari sono gli esempi di sistemi che possiamo fare, per capire la vastità del termine, dei campi di interesse e delle metodologie sottese. Il livello di astrazione di un sistema prende il nome *di livello di risoluzione* ed è fondamentale, per la costruzione del modello di

¹ Dipartimento M.E.T., Università di Teramo; e-mail: eugenif@tin.it, ennio.cortellini@tin.it

sistema sul quale effettivamente operare. La formulazione matematica del processo, costituisce il vero fulcro del problema.

Parole Chiave: sistema, modellazione, equazione di stato, forma canonica.

1. Introduzione

In questo volume dedicato allo studio dei fondamenti della matematica, non poteva mancare l'approccio tradizionale all'applicativo. Tale approccio passa necessariamente per la Teoria dei sistemi posti a fondamento di qualunque legame che vada dalla teoria generale alla teoria applicata.

La Teoria dei Sistemi si può collocare alla base di moltissime discipline dello scibile umano e si adatta, di fatto, con differenti sfumature sia a discipline esatte, sia in discipline dove è centrale la progettazione tecnica. Sistemi di tipo esatto si incontrano nelle aree di tipo matematico, fisico, informatico, e tali sistemi hanno il compito di chiarire i contesti teorici ove ci si muove. In settori progettuali, come quelli dell'area relativa ad architettura ed ingegneria essi hanno il compito di fare da ponte tra acquisizioni teoriche e realizzazioni pratiche. La Teoria dei Sistemi, tuttavia, si applica anche a discipline dove, questi rapporti sono più sfumati, anzi si compenetrano tra loro, creando delle sinergie insospettate tra settori apparentemente molto lontani tra loro. Così la sociologia, la pedagogia, la psicologia, tanto per citare alcune discipline di interesse comune lavorano e agiscono utilizzando in forma più o meno consapevole la Teoria dei Sistemi.

La Teoria dei Sistemi è una metodologia di studio che si preoccupa in primo luogo di individuare le relazioni che intercorrono tra le varie componenti dell'oggetto o sistema in esame, qualora si tenda a riguardarlo ed esaminarlo da un punto di vista globale, immerso naturalmente in un ambito più esteso che si dice *ambiente*.

In contrapposizione con la metodologia sistemica possiamo porre la Teoria Analitica che ha la tendenza a scomporre l'oggetto in esame, il sistema se si vuole, in una miriade o esplosione di parti elementari o

atomiche, ovvero considerate tali, da studiare ciascuna indipendentemente dalle altre.

Un esempio di contrapposizione di queste metodologie ci può essere prestato dalla valutazione scolastica. Uno studente viene valutato da un gruppo di insegnanti di discipline diverse e consegue dei voti separati. La media matematica dei voti ottenuti esprime sì una valutazione, ma tale valutazione, pur provenendo da un processo analitico, non tiene in alcun conto le interazioni tra le discipline ed è quindi una valutazione globale mediata analitica e non sistemica. Differente è l'atteggiamento secondo il quale il singolo valutatore, pur avendo memoria del suo giudizio individuale, lo sottopone ad un esame collettivo di confronto con quello di altri valutatori. Assieme essi addivengano ad una verifica di obiettivi predefiniti e di percorsi interdisciplinari. Essi così esprimono un giudizio qualitativo sui processi logici e relazionali acquisiti dal discente. Una tale metodologia è certamente di tipo sistemico e valuta globalmente la maturità raggiunta rispetto ad alcuni obiettivi fissati. Il primo è il sistema oggi usato ad esempio nelle Università ai fini di stabilire il voto di laurea, sia pure con l'utilizzo di un addendo correttivo, anche algebrico, rispetto alla media. Il secondo sistema descrive la metodologia pensata e in uso nei nuovi esami di stato.

Vari sono gli esempi di sistemi che possiamo fare, per capire la vastità del termine, dei campi di interesse e delle metodologie sottese.

Il sistema macro che ci appare agli occhi giornalmente è il *sistema solare*, le parti del sistema sono i pianeti e il sole, le relazioni tra le parti sono le leggi fisiche che regolano le attrazioni tra i pianeti, il loro movimento, i fenomeni vari che possiamo osservare. E' il sistema dell'infinitamente grande al quale si può contrapporre l'infinitamente piccolo, lo stato atomico, che da luogo a sistemi che nessuno ha mai visto in concreto da vicino.

Un sistema micro, per esempio, che ci appare meno agli occhi, ma che è di importanza vitale per il singolo è il *sistema cardiocircolatorio* dove le parti sono il cuore e i vasi sanguigni. Le relazioni tra le parti sono appunto il comportamento del cuore, delle vene, delle arterie etc.

Un sistema meno naturale, ma prodotto più dal pensiero e dal comportamento dell'uomo è ad esempio il *sistema economico* dove le parti del sistema sono le risorse, la produzione, la distribuzione e il mercato, a volte fantomatico e bizzarro come un cavallo non domato. Le relazioni sono le varie funzioni di produzione, la legge della domanda e dell'offerta. E' interessante notare come strumenti analitici possono essere di importanza notevole in settori di questo tipo. La determinazione delle risorse, noto che sia l'obiettivo di produzione da raggiungere, è governato da regole matematiche precise, linearizzate per semplicità nel classico modello di Leontieff (per un approfondimento si veda V.Di Marcello- F.Eugeni- D. Tondini, *Matematica un approccio*, Edigrafital,1998 ,Teramo). Più complessa è la valutazione della quantità di produzione da raggiungere. Se la crescita indeterminata della produzione portò nel 1929 a fenomeni catastrofici, come il famoso crack del '29, oggi questa parte del fenomeno viene controllata con l'Analisi di mercato che utilizza, di fatto la Statistica Economica. Questo potente strumento, se usato con la giusta competenza, è fortemente indicativo. La complessità delle interazioni che intervengono, che vanno appunto dalla produzione alle gestione delle scorte di magazzino, sono elaborate per via informatica, con programmi avveniristici, che a volte in tempo reale compiono operazioni che sarebbero impossibili per quegli stessi uomini che hanno progettato i programmi. Da questo punto di vista vediamo i sistemi informatici, come strumenti di supporto: delle protesi geniali atte a potenziare le capacità gestionali anche di modesti operatori.

Per andare sul sociale citiamo il sistema familiare nel quale la parti sono i singoli componenti e le relazioni sono le varie dinamiche che si stabiliscono tra le parti. Questo sistema oggi, come ben sappiamo, sta subendo dei mutamenti notevoli. Esaurito il vecchio modello piramidale costituito dalla famiglia patriarcale, siamo passati per modelli di micro-famiglia, modelli sostanzialmente in crisi per le richieste sempre più pressanti provenienti dal mercato del lavoro e con tendenze verso modelli più ampi come quelli connessi con il concetto di famiglia allargata, concetto che trova ancora delle forme di reazione conflittuali. Probabilmente un'attenta analisi della storia e della

evoluzione del concetto di famiglia, potrebbe portarci ad una comprensione più consapevole, almeno di quelle che saranno le proiezioni per il futuro. Un problema che emerge è quello dell'assistenza degli anziani, la cui età media è in crescita con tendenza ad essere abbastanza elevata, mentre la micro famiglia manifesta difficoltà notevoli a condurre, senza sacrifici improponibili, forme di assistenza adeguate.

Da un punto di vista delle astrazioni dalla realtà un sistema viene riguardato come una scatola nera dotata di inputs e outputs. La scatola nera può essere riguardata come un insieme di blocchi, ognuno dei quali sia una scatola nera, per evidenziare maggiormente il funzionamento relazionale tra le parti/blocchi piuttosto che il contenuto delle parti stesse.

Il livello di astrazione dipende dallo scopo dell'indagine che si vuole effettuare e dagli intervalli di spazio e tempo che si considerano. Il livello di astrazione di un sistema prende il nome di *livello di risoluzione* ed è fondamentale, per la costruzione del modello di sistema sul quale effettivamente operare.

Da un punto di vista globale e in una fase iniziale vi sono gli input e gli output del sistema-scatola nera. Aumentando la risoluzione il modello generale di scatola chiusa si apre, si risolve nell'esame dei blocchi che compongono il sistema e alle mutue relazioni tra i blocchi. In una successiva e più approfondita risoluzione ciascun blocco è suscettibile ad essere studiato, a sua volta, come un sottosistema e da esso possono astrarsi nuove relazioni anche da portare all'esterno.

Scopo dei modelli è di dare rappresentazioni a volte semplificate, a volte fedeli, altre parziali per evidenziare gli aspetti significativi in funzione degli obiettivi.

Ancora può capitare che due sistemi riferiti a contesti completamente differenti si comportino e funzionino nello stesso modo. Si dice allora che i due sistemi sono *isomorfi* o *analoghi* e queste analogie vengono evidenziate allo scopo di trasportare delle idee da un oggetto di indagine all'altro. Quando questo fenomeno si stabilisce si dice che i due modelli esercitano un'*azione di risonanza*, nel senso che ogni sistema riesce a vivificare l'altro di nuove problematiche.

La Teoria dei Sistemi si può pensare come ben presente in tutte quelle attività che possono essere classificate come *sistemi di coalizioni*.

In un sistema costituito da una popolazione nella quali ogni singolo individuo ha un valore, può essere conveniente che alcuni sottogruppi si costituiscano in coalizioni allo scopo di ottenere, tutti assieme, un valore di gruppo, superiore a quello che sarebbe la somma dei valori dei singoli componenti. Una tale coalizione si dice allora *coalizione vincente*.

Naturalmente se la popolazione ha numeri enormi come nel caso di popolazioni biologiche le stime sui singoli hanno carattere del tutto aleatorio e statistico, occorrono ipotesi forti per gestire modelli sostanzialmente non deterministici e legati alla cultura dell'incerto. Non così se la popolazione ricade in elenchi di facile gestione informatica. Senza teorizzare molto possiamo dire che è la stragrande maggioranza delle strutture ad essere organizzate in tal modo, da grandi Enti come Regioni e Comuni, ma anche Università e ASL, associazioni di categoria e strutture ove vi sono aree di competenza, interazioni tra aree, dinamiche tra le persone e con gli utenti, tutti grandi sistemi dove la complessità è un aspetto da approfondire e valutare.

Aspetti sui quali non mi posso soffermare, ma di importanza notevole, in relazione ai sistemi sono:

2. Modelli

Quando si vuole studiare un sistema, in quanto entità complessa, è necessario usare un modello, più o meno semplificato, ma comunque capace di evidenziarne gli aspetti significativi in relazione al contesto in cui viene posto ed esaminato. Quando il modello fornisce una rappresentazione fedele del sistema, pur se in scala ridotta, esso viene definito "modello analogico". Viceversa, quando la realtà viene rappresentata con modelli astratti, questi vengono definiti "simbolici". Pertanto si definiscono simboliche quelle modellazioni che descrivono

i sistemi come insiemi di relazioni matematiche. Parimenti sono simbolici i grafi, i diagrammi .

2.1. Il concetto di modello matematico

Per modello matematico di un sistema si intende una struttura astratta, solitamente un insieme di equazioni, in grado di descrivere con sufficiente accuratezza il comportamento di un dato processo, cioè del sistema dinamico reale in esame.

Il grado di complessità del modello matematico in termini di numero, grado e forma delle equazioni, deriva dal giusto compromesso fra l'esigenza di riprodurre il più fedelmente possibile il processo reale e quella di essere sufficientemente semplice nell'impostazione e nella risoluzione da permetterne la più ampia utilizzazione.

Non solo, ma il livello di approssimazione (o di incertezza) del modello deve condizionare ogni modello successivo poiché risulterebbe inutile l'uso di tecniche dettagliate oltre l'incertezza del modello stesso.

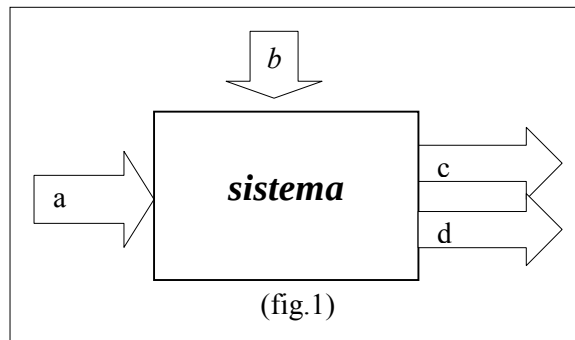
Un insieme di relazioni matematiche, che lega le diverse grandezze di un sistema rappresenta un modello astratto le cui variabili possono essere suddivise in quattro categorie fondamentali :

- *grandezze d'ingresso manipolabili (a)*
- *grandezze d'ingresso non manipolabili (b)*
- *grandezze d'uscita primarie (c)*
- *grandezze d'uscita primarie (d)*

Le grandezze d'ingresso *manipolabili* sono accessibili e possono essere usate per il controllo del sistema, mentre quelle *non manipolabili* costituiscono i disturbi agenti sul sistema stesso.

Queste variabili hanno un andamento casuale e incontrollabile e condizionano in modo imprevedibile il comportamento del sistema.

Il modello matematico può essere quindi espresso in forma grafica mediante l'uso di uno *schema a blocchi* come qui indicato (fig.1).



Il sistema è rappresentato da un rettangolo con delle variabili in entrata e in uscita. Le frecce in entrata rappresentano gli ingressi cioè le sollecitazioni fornite al sistema, mentre le quelle in uscita rappresentano le grandezze che variano nel sistema in funzione degli ingressi.

Il sistema viene rappresentato da un blocco poiché non interessa com'è fatto cioè l'aspetto strutturale, ma interessa piuttosto il suo comportamento, i legami tra ingresso e uscita ossia l'aspetto funzionale.

Sugli schemi a blocchi sono definite delle particolari operazioni che permettono di esprimere il modo di operare dei sistemi sessi.

2.2. Classificazione dei modelli matematici

La natura di un modello matematico è strettamente connessa con le caratteristiche del sistema in studio e del grado di approssimazione con il quale lo si vuole rappresentare. Appare quindi evidente che i modelli possono essere classificati in funzione delle loro caratteristiche principali, si hanno così:

- Modelli lineari e non lineari
- Modelli statici e dinamici
- Modelli continui e discreti

Un modello si dice *lineare* se è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti tra le variabili d'ingresso e quelle d'uscita. In caso contrario il sistema è classificato del tipo *non lineare*. Quando le relazioni che legano le variabili d'ingresso e quelle d'uscita sono lineari (algebriche) il modello è detto *statico*. Se invece la natura delle relazioni fra le variabili è di tipo derivato (equazioni differenziali) il modello si dice *dinamico*. Infine un modello si dice continuo o discreto a seconda che la variabile indipendente tempo venga fatta variare con continuità o in modo discreto.

2.3. La costruzione del modello matematico

La formulazione matematica del processo, ossia la sua traduzione nel corrispondente modello matematico, costituisce il vero fulcro del problema, in quanto è evidente che l'individuazione di un errato modello matematico di descrizione oltre ad non avere utilità, induce ad una falsa comprensione del sistema reale in esame con le ovvie conseguenze in termini di analisi dei risultati.

E' quanto mai importante, quindi, riuscire a rappresentare i sistemi attraverso modelli corretti ed in tal senso è utile ricordare che la loro costruzione avviene solitamente attraverso due fasi, che non si escludono ma che, anzi, si devono integrare per poter giungere a risultati significativi. Ci si riferisce in particolare al procedimento analitico e al procedimento sperimentale.

Il primo, detto anche dall'interno del sistema, consiste nell'analisi accurata del sistema stesso e nella sua suddivisione in sottosistemi, tali che l'individuazione dei loro principi di funzionamento sia più agevole e comunque siano rappresentativi nel loro insieme dello schema procedurale del sistema principale. Nella fase seguente, poi, è necessario tradurre tali principi di funzionamento nelle relazioni matematiche che meglio li descrivono ed elaborarli per giungere a risultati quantitativi.

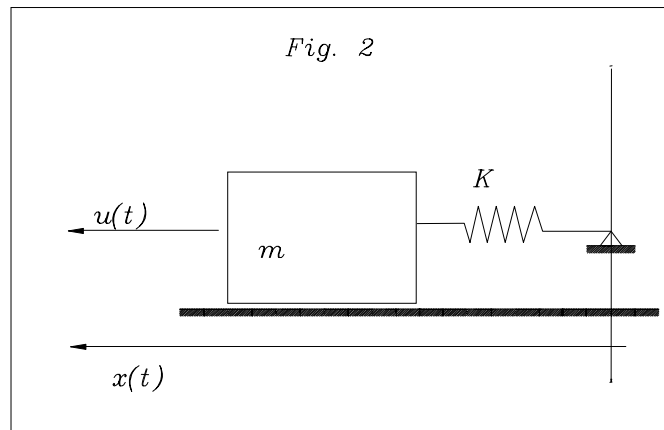
Il procedimento sperimentale, detto anche dall'esterno del sistema, consiste nella ricerca di un opportuno modello capace di restituire risposte simili a quelle generate dal sistema reale se gli vengono forniti alcuni dati in ingresso. Questo procedimento si sviluppa attraverso la *Simulazione* di una certa struttura matematica.

I simulatori circuitali, derivanti dall'analogia che può realizzarsi fra il sistema stesso ed il circuito elettrico equivalente, consentono di predire in maniera molto precisa il funzionamento del sistema, fornendo informazioni a volte impossibili da ottenere con misure dirette di laboratorio.

Per definire la simulazione, è necessario costruire un programma informatico la cui realizzazione è subordinata alla formulazione delle equazioni circuitali ed alla realizzazione di algoritmi per la loro soluzione.

2.3.1. Modellazione dei sistemi dinamici continui

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in Figura 2, costituito da un corpo rigido di massa m che scorre su un piano senza attrito, che è ancorato, tramite una molla di rigidezza K , ad una parete. Il corpo è assoggettato all'azione di una forza esterna F .



Il modello matematico, detto *modello dinamico nello spazio di stato*, in grado di descrivere il moto del corpo, ed in particolare la traiettoria seguita dal centro di massa, è ricavabili imponendo l'equilibrio, mediante il seguente sistema di equazioni lineari del primo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \ddot{x}_2 &= (-k/m)x_1 + (1/m)F(t) \end{aligned}$$

essendo:

$x_1(t) = x(t)$ la posizione della massa rispetto a quella di riposo,
 $x_2(t) = v(t)$ velocità della massa

Questo modello dinamico viene in genere descritto in modo compatto, tramite la forma matriciale. Più precisamente, indicato con $x = [x_1 \ x_2]^T$ il vettore di stato e con F, g, h le seguenti matrici

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & g \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad h = [1 \ 0]$$

il modello che descrive il comportamento della variabile di interesse può essere posto nella forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + gu \\ y &= hx \end{aligned}$$

La seconda equazione descrive il legame tra la variabile di interesse, detta *funzione di uscita*, e lo stato del sistema.

Fra i modelli a tempo continuo è opportuno, anche brevemente, ricordare il sistema ecologico preda-predatore di Volterra-Lotka ed un modello dell'apparato cardio-circolatorio umano.

Il comportamento di un sistema ecologico, con una specie preda e l'altra specie predatore, può essere descritto da una coppia di equazioni differenziali

Indicando con

- x_1 il livello di popolazione, cioè il numero di individui, supposto continuo, della specie preda
- x_2 il livello della specie predatore,

allora la coppia di equazioni che descrive il modello è:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_1x_2 + dx_2 \end{aligned}$$

dove i parametri a , b , c e d sono tutti positivi.

Facendo delle semplici considerazioni qualitative si vede che:

- per $x_2 = 0$ si ha una crescita delle prede tasso di crescita pari ad a .
- per $x_1 = 0$ il livello dei predatori decresce con tasso d
- per $x_1 \neq x_2 \neq 0$ cioè le specie sono presenti entrambe, il numero di prede decresce in funzione del numero di incontri preda-predatore, $(-bx_1x_2)$ ed il numero di predatori cresce in funzione del numero di incontri preda-predatore, (dx_1x_2) .

Per simulare l'apparato cardio-circolatorio umano sono stati proposti vari modelli, di complessità ed accuratezza diversa. Partendo da considerazioni di meccanica dei fluidi, la struttura del modello è definita, di solito, facendo ricorso ad analogie elettriche.

Un modello, detto *modello ad elastanza variabile*, di uso molto frequente per la descrizione semplificata del sistema circolatorio, che tiene conto solo del ventricolo sinistro e del carico arterioso, costituisce un sistema non lineare, in quanto sono presenti dei diodi usati per modellare le valvole mitrale e quella dell'aorta.

Secondo tale modello, il volume VLV e la pressione interna PLV del ventricolo sono legati dalla relazione:

$$P_{LV}(t) = P_{L0} + (V_{LV}(t) - V_{L0})E(t) + R \dot{V}_{LV}(t)$$

in cui

- $E(t)$, variabile nel tempo in modo periodico, con periodo pari a quello cardiaco, è il parametro che descrive le capacità elastiche del muscolo,
- $PL0$ e $VL0$ sono delle costanti che rappresentano i parametri di traslazione.

Ricorrendo alla seguente analogia elettrica:

- differenza di pressione $\leftrightarrow$ differenza di potenziale)
- portata $\leftrightarrow$ corrente, si ricava
- induttanza idraulica $\leftrightarrow$ induttanza elettrica
- area della sezione retta $\leftrightarrow$ capacità
- resistenza idraulica $\leftrightarrow$ resistenza elettrica

ne consegue che il vettore di stato del sistema è costituito da:

- QL = flusso attraverso l'induttanza di carico Lc
- Lc = inertanza del sangue in aorta
- $P1$ = tensione ai capi del condensatore Ca
- Ca = complianza arteriosa
- VLV = volume del ventricolo che ne descrive lo stato interno.

La scelta delle variabili di uscita del modello, sono:

- la pressione in ventricolo, PLV ,
- la pressione in aorta, PAo ,
- il flusso in uscita dal ventricolo.

Le grandezze esterne che influenzano il comportamento del sistema, sono:

- parametro di traslazione $PL0$ per $VL0 = 0$
- pressione media nel ciclo in atrio Pmc .

Sotto tali condizioni, il complesso sistema di equazioni che descrive l'apparato in esame diviene:

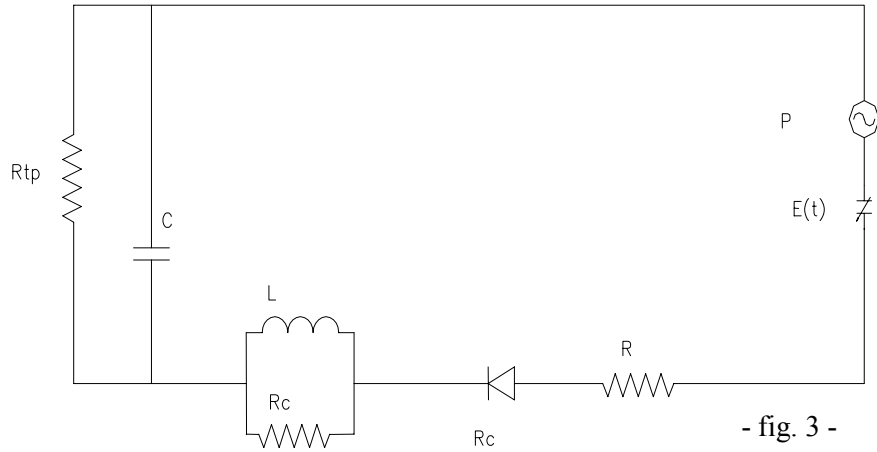
$$\begin{aligned} d \frac{P_1}{dt} &= - \frac{N_o \Gamma + \frac{1}{R_{TP}}}{C_A} P_1 + \frac{N_o \Gamma R_c}{C_A} Q_L + \frac{N_o \Gamma E(t)}{C_A} V_{LV} + \frac{N_o \Gamma}{C_A} P_{L0} \\ d \frac{Q_L}{dt} &= - \frac{N_o \Gamma R_c}{L} P_1 + \frac{R_c (N_o \Gamma R_c - 1)}{L} Q_L + \frac{N_o \Gamma R_c E(t)}{L} V_L + \frac{N_o \Gamma R_c}{L} P_{L0} \\ d \frac{V_{LV}}{dt} &= - \frac{N_o \Gamma R_{id} - N_i \Gamma R \Gamma}{R_{id}} P_1 - \frac{N_o \Gamma N_i R_c R}{R_{id} - N_o \Gamma R_c} Q_L + \\ &\quad - (N_o \Gamma E(t) + \frac{N_i E(t)}{R_{id}} (1 - N_o \Gamma R)) \end{aligned}$$

$$Q_{LV} = -N_o \Gamma P_1 + N_o \Gamma R_c Q_L + N_o \Gamma E(t) V_L + N_o \Gamma P_{L0}$$

$$P_{A0} = (1 - N_o \Gamma R_c) P_1 + (N_o \Gamma R_c^2 - R_c) Q_L + N_o \Gamma R_c E(t) V_{VL} + N_o \Gamma R_c P_{L0}$$

$$P_{LV} = N_o \Gamma R P_1 - N_o \Gamma R R_c^2 Q_L - (N_o \Gamma R - 1) E(t) V_{VL} + (1 - N_o \Gamma R_c) P_{L0}$$

Il suddetta sistema di equazioni è stato ricavato dal circuito elettrico equivalente al sistema cardiocircolatorio è riportato in figura 3:



2.3.2. Modellazione dei sistemi dinamici discreti

Un tipico esempio di sistema a tempo discreto è costituito dal modello dinamico di un magazzino.

Indicando il livello della merce presente nel magazzino all'inizio di un fissato intervallo di tempo con $y(t) \in Z$ e supponendo che gli ordini per il rifornimento del magazzino siano inviati al fornitore all'inizio del periodo considerato, cioè all'inizio del t -esimo periodo di tempo, e che il fornitore consegna nell'arco di tempo tra l'inizio e la fine del periodo t -esimo la merce ordinata all'inizio del periodo $t - 1$.

Indichiamo come funzioni d'ingresso del sistema

- $u(t)$ la quantità ordinata
- $v(t)$ la merce consegnata ai clienti durante il periodo t .
- $y(t)$ la funzione di uscita

si vuol conoscere livello della merce nel magazzino.

Sotto tali condizioni il legame tra le varie grandezze è espresso dalla seguente *equazione alle differenze finite* del secondo ordine

$$y(t + 1) = y(t) + u(t - 1) - v(t)$$

Una possibile scelta delle variabili di stato è:

$$x_1(t) = y(t) \quad , \quad x_2(t) = u(t - 1)$$

quindi si ha

$$x_1(t + 1) = x_1(t) + x_2(t) - v(t)$$

$$x_2(t + 1) = u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Indicando con F, g, h le seguenti matrici

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h = [10]$$

il modello che descrive il comportamento della variabile di interesse può essere posto nella forma:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$$

$$y(t) = hx(t)$$

Senza entrare nello specifico è doveroso ricordare i modelli *stocastici* cioè i modelli di tipo non deterministico in cui l'evoluzione dello stato dipende anche da fenomeni descrivibili solo in termini probabilistici. Fra questi ricordiamo i modelli usati per l'analisi di sicurezza degli impianti industriali ad alto rischio.

Un altro insieme di sistemi dinamici a tempo discreto di grande interesse, è quello costituito dagli *algoritmi iterativi* per il calcolo numerico.

Per studiare il comportamento logico di un sistema sono utili altri modelli come ad esempio le *reti di Petri*.

3. Sistemi dinamici

Si consideri un sistema, descritto da un particolare modello matematico, e suddiviso in sottosistemi S_i descritti dai relativi sottoinsiemi di relazioni matematiche. Esattamente sia:

$$S = \{ S_1 S_2 \dots S_i \dots S_n \}$$

il sistema costituito dai sottosistemi e $V_{ij} = \{v_{ij}\}$ l'insieme delle variabili che descrivono le interazioni fra l'i-esimo ed il j-esimo sottosistema.

Isolando il sottosistema S_i ed indicando con $V_i = \{v_i\}$ l'insieme delle variabili *esterne*, cioè le variabili che S_i ha in comune con gli altri

sottosistemi S_n , allora queste variabili possono essere suddivise in variabili “dipendenti” (u_i) ed indipendenti (y_i) ossia

$$V_i = \{u_i, y_i\}$$

La suddivisione di V_i , però, non può essere arbitraria ed è tale che caratterizza ogni sottosistema S_i come *oggetto orientato*.

Se si indica con t la variabile scalare *tempo* tale che:

$$u_i = u_i(t) \quad \text{e} \quad y_i = y_i(t)$$

ed inoltre se il valore delle y_i all'istante t , non è univocamente determinato dal valore assunto, nel medesimo istante, dalle variabili d'ingresso u_i , allora il sistema si dice *dinamico*.

Per un sistema dinamico è possibile determinare la sua evoluzione su un determinato intervallo di tempo $[\tau, t)$ mediante la funzione

$$y(t) = \eta[t, \tau, x(\tau), u(.)] \quad \text{per ogni } t > \tau \quad (1)$$

in cui :

- $y(t)$ rappresenta il valore assunto dall'uscita in un certo istante t , che per il principio di causalità a cui necessariamente deve essere soggetto il modello, dipende soltanto dalle variabili d'ingresso.
- $x(\tau)$ è il valore assunto dalle altre variabili del sistema (di stato)
- $u(.) = u[\tau, t)$
- η rappresenta la funzione di *transizione dell'uscita*

In generale la funzione $\eta[t, \tau, x(\tau), u(.)]$ è la rappresentazione esplicita in uscita, a partire a partire dalla condizione iniziale $x(\tau)$ all'istante τ , sotto l'effetto della sequenza d'ingresso $u(.)$.

Nel caso in cui $t = \tau$ si ha:

$$y(t) = \eta[t, t, x(t), u(t)] = g[x(t), u(t), t] \quad (2)$$

A questa equazione detta dell'uscita cioè capace di descrivere l'evoluzione del sistema, occorre abbinare un'equazione che rappresenti l'evoluzione dello stato nel generico intervallo $[\tau, t]$, cioè che consenta di determinare $x(t)$ come funzione di $t, \tau, x(\tau)$ e l'andamento di u sull'intervallo da τ a t . Tale equazione è formalmente così identificabile:

$$x(t) = \varphi[t, \tau, x(\tau), u(\cdot)]$$

in cui la funzione φ è detta *funzione di transizione dello stato* ed ogni equazione capace di descrivere φ è detta *equazione di stato*.

3.1. Forma canonica dei sistemi dinamici a dimensioni finite

Generalmente nei sistemi a tempo continuo, la funzione di transizione dello stato è descritta da un insieme finito di equazioni differenziali ordinarie; in tal caso la variabile di stato si evolve in uno spazio vettoriale n -dimensionale con n finito e di conseguenza anche il sistema dinamico si dice che è n -dimensionale.

L'equazione vettoriale di stato sarà del tipo:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}[\vec{x}(t), t]$$

dove, per ogni $t, \vec{x}(t) \in R^n$ e $\vec{u}(t) \in R^m$.

La funzione $\vec{f}$, inoltre, dovrà essere sufficientemente regolare in modo che per ogni valore iniziale ammissibile della variabile $\vec{x}$, la soluzione esista e sia unica.

Nel caso di sistemi dinamici a tempo discreto, invece, la forma normale dell'equazione vettoriale di stato è la seguente:

$$\vec{x}(t+1) = \vec{f}[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$

In ogni caso, comunque, l'equazione di uscita è del tipo:

$$\vec{y}(t) = g[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$$

dove per ogni $t, \vec{y}(t) \in R^p$.

Da quanto sopra deriva che un sistema dinamico a dimensione finita in forma normale è:

- *invariante nel tempo*, se le funzioni $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, .)$ e $\vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, .)$ sono costanti per ogni $\vec{x}$ e $\vec{u}$, cioè se sono indipendenti dal tempo qualsiasi valore assumano.
- *Periodico* (di periodo T) se le funzioni $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, .)$ e $\vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, .)$ sono periodiche di periodo T .
- *Dinamico in senso proprio* se la funzione $\vec{g}(\vec{x}, t, .)$ è costante per ogni $\vec{x}$ e t ; cioè se è indipendente da $\vec{u}$, qualunque sia il valore di $\vec{x}$ e di t .
- *Libero* se le funzioni $\vec{f}(\vec{x}, t, .)$ e $\vec{g}(\vec{x}, t, .)$ sono costanti per ogni $\vec{x}$ e t . È da evidenziare che può essere ricondotto al caso di *sistema dinamico libero* quello in cui $\vec{u}$ ha un solo andamento ammissibile, cioè $\vec{u}(\cdot)$, infatti basta porre per ogni t :

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{f}[\vec{x}, \vec{u}(t), t] \text{ e}$$

$$\vec{g}(\vec{x}, t) = \vec{g}[\vec{x}, \vec{u}(t), t]$$

e di considerare quindi il sistema definito tramite le equazioni di stato e di uscita dalle funzioni $\vec{f}$ e $\vec{g}$;

- *autonomo* se è libero ed invariante nel tempo cioè se le funzioni $\vec{f}$ e $\vec{g}$ sono costanti per ogni $\vec{x}$.

- *Lineare* se le funzioni $\vec{f}(.,.,t)$ e $\vec{g}(.,.,t)$ sono lineari per ogni t , cioè se

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) &= F(t)\vec{x} + G(t)\vec{u} \\ \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, t) &= H(t)\vec{x} + K(t)\vec{u}\end{aligned}$$

dove F è la matrice dinamica, G è la matrice d'ingresso, H è la matrice d'uscita, K è la matrice diretta.

In relazione alle caratteristiche di tali matrici il sistema si definisce:

- 1) *invariante nel tempo*, se dette matrici sono tutte costanti
- 2) *periodico*, se dette matrici sono periodiche
- 3) *dinamico in senso proprio*, se $K=0$
- 4) *libero*, se $K=G=0$
- 5) *autonomo*, se $K=G=0$ ed F e H sono costanti.

3.2. Evoluzione dello stato e stabilità dei sistemi dinamici

L'evoluzione dello stato di un sistema è definita attraverso la sua funzione di transizione che ci consente di determinare il valore assunto a ogni istante t dallo stato $\vec{x}$, a partire da un valore iniziale $\vec{\sigma}$, sotto l'azione di un ingresso $\vec{u}(.)$, sull'intervallo di tempo $[\tau, t]$.

La funzione $x(.) = \varphi[., \tau, \sigma, u(.)]$ è il *movimento* di $\vec{x}$, prodotto da $u(.)$, a partire all'istante τ da $\vec{\sigma}$.

Una delle nozioni fondamentali per lo studio dell'evoluzione dello stato del sistema è quella di *stabilità*. Per stabilità, facendo riferimento a quella relativa al moto, si indica in genere l'attitudine di un sistema dinamico a reagire con variazioni limitate del moto o delle risposte a perturbazioni dello stato iniziale o dell'ingresso.

Definizione 1. Ponendo per ogni $\vec{\delta\sigma} \in R^n$, le seguenti condizioni

$$\vec{x}(t, \vec{\delta\sigma}) = \varphi[t, \tau, \vec{\sigma} + \vec{\delta\sigma}, \vec{u}(.)]$$

$$\vec{\delta x}(t, \vec{\delta\sigma}) = \vec{x}(t, \vec{\delta\sigma}) - \vec{x}(t)$$

indicando cioè con $\vec{\delta x}(., \vec{\delta\sigma})$ la perturbazione prodotta da una variazione $\vec{\delta\sigma}$ dello stato iniziale ed indicando con $\|\vec{z}\|$ la norma euclidea di $\vec{z}$, si avrà che il movimento $\vec{x}(.)$ è:

- *stabile* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una quantità $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $\vec{\delta\sigma}$ minore di norma di $\delta(\varepsilon)$, risulta $\|\vec{\delta x}(t, \vec{\delta\sigma})\| < \varepsilon$, per ogni t ;
- *asintoticamente stabile* se risulta inoltre $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{\delta x}(t, \vec{\delta\sigma})\| = 0$
- *periodico* di periodo T se per ogni t si ha $\vec{x}(t + T) = \vec{x}(t)$
- *instabile*, se $\vec{x}(.)$ non è stabile.

Definizione 2. Si chiama traiettoria il percorso descritto, al variare di t , dal punto $\vec{x}(t)$ nello spazio di stato. Diciamo che la traiettoria corrispondente al movimento $\vec{x}(.)$ è stabile se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $t' > \tau$ e per ogni $\vec{\delta\sigma}$ minore in norma di $\delta(\varepsilon)$, è possibile determinare $t''(t', \vec{\delta\sigma}) > \tau$ in modo che risulti $\|\vec{x}(t''(t', \vec{\delta\sigma}), \vec{\delta\sigma}) - \vec{x}(t')\| < \varepsilon$.

Definizione 3. Dato un andamento $\vec{u}(.)$ dell'ingresso sull'intervallo $[\tau, \infty)$, si dice che $\vec{x}$ è uno *stato di equilibrio*, corrispondente a $\vec{u}(.)$, da τ in poi, se $\varphi[t, \tau, \vec{x}, \vec{u}(.)] = \vec{x}$, per ogni $t > \tau$, cioè se dà origine ad un movimento costante.

Poiché il movimento può essere stabile, instabile o asintoticamente stabile anche il corrispondente stato di equilibrio si dirà che stato di equilibrio stabile, instabile o asintoticamente stabile. La traiettoria corrispondente ad un movimento costante è un unico punto che si identifica proprio con lo stato di equilibrio stesso.

Bibliografia

- [1] R.E.Kalman, P.L.Falb, M.A.Arbib, *Topics in mathematical systems theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1969
- [2] D. Luemberger, *Introduction to dinamic systems*, Wiley, New York, 1979
- [3] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1980
- [4] G. Marro, *Teoria dei sistemi*, Patron, Bologna, 1975
- [5] L.A. Zadeh e C.A. Desoer, *Linear system theory*, McGraw-Hill, York, 1963
- [6] A. Ruberti, A. Isidori, *Teoria dei sistemi*, Boringhieri, Torino, 1979
- [7] S.P. Banks, *Mathematical theories of nonlinear systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988
- [8] S. Rinaldi, *Teoria dei sistemi*, CLUP, Milano, 1973
- [9] P.H. Starke, *Abstract automata*, North-Holland, Amsterdam, 1972
- [10] R. De Carlo e R. Sacks, *Interamned dynamical systems*, Dekker, New York, 1981
- [11] H. Nicholson, *Structure of interconnected systems*, Peter Peregrinus, Stevenage, 1978
- [12] J.M. Holtzman, *Nonlinear system theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970
- [13] M.K. Sain, *Introduction to algebraic systems theory*, Academic Press, New York, 1981
- [14] A. Isidori, *Nonlinear control systems*, Springer, Berlino, 1985
- [15] A.G. Butkovskiy, *Structural theory of distributed systems*,

- Wiley, New York, 1993
- [16] K.J. Astrom, *Introduction to stochastic control systems*, Academic Press, New York, 1970
 - [17] S. Bittanti, *Identificazione parametrica*, CLUP, Milano, 1981
 - [18] L. Ljung, *System identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987
 - [19] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer, Berlino, 1967
 - [20] W. Leonhard. *Control of Electrical Drives*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
 - [21] A.E. Fitzgerald, C. Kingsley Jr, and S.D. Umans. *Electric Machinery*. Mc Graw-Hill, 1983
 - [22] J. Meisel. *Principles of Electromechanical-Energy Conversion*. Mc Graw-Hill, USA, 1966
 - [23] P.C. Krause, *Analysis of Electric Machinery*. Mc Graw-Hill, 1986
 - [24] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems. Communications and Control Engineering Series*. Springer Verlag, Berlin, terza edizione, 1992
 - [25] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980
 - [26] E. Fornasini and G. Marchesini, *Appunti di Teoria dei Sistemi*. Edizioni Libreria Progetto, 1994
 - [27] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechamics*. U. of Toronto Press, Toronto, 1970
 - [28] E. Cinlar, *Introduction to Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975
 - [29] S.M. Ross, *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1983.
 - [30] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*. MacMillan Publishing Company, New York, 1990.
 - [31] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Robotica Industriale*. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 1995.
 - [32] J.I. Neimark and N.A. Fufaev, *Dynamics of Nonholonomic Systems. Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1972.
 - [33] Antonio Tornambè, *Discrete Event System Theory. An Introduction*, World Scientific, Singapore, 1995

- [34] Donato Carlucci and Giuseppe Menga, *Teoria dei Sistemi ad Eventi Discreti*. Utet, Torino, 1998
- [35] M. Zhou, F. Di Cesare, *Petri Net Synthesis for Discrete Event Control Of Manufacturing Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [36] P. Valigi, *Dispense del corso Teoria dei Sistemi*, Università di Perugia, 2001.
- [37] C.G. Cassandras, *Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis*, Irwin & Aksen, Boston, MA, 1993.
- [38] J.O. Moody and P.J. Antsaklis, *Supervisory Control of Discrete Event Systems Using Petri Nets*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [39] Shankar Sastry, *Nonlinear Systems: analysis, stability and control*, Springer-Verlag, 1999.
- [40] Davison E.J., Edt. *Benchmark problems for control system design. Report of the IFAC theory committee*, IFAC . May 1990.
- [41] Morari M. and Zafiriou E., *Robust process control*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1989.