LA SEZIONE AUREA ED I NUMERI DI FIBONACCI

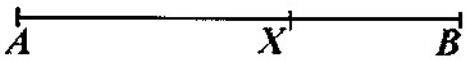
Raffaele MASCELLA
Dipartimento di Metodi per l'Economia ed il Territorio,
Professore a contratto, Università di Teramo

Daniela TONDINI
Dipartimento di Metodi per l'Economia ed il Territorio
Professore a contratto, Università di Teramo

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito dei saperi la Matematica e la geometria hanno spesso avuto ruoli non secondari specialmente ai fini dei collegamenti che la geometria ha con l'arte, con la combinatoria, con la teoria dei giochi, con la crittografia e con molti altri campi del sapere che possono portarci addirittura a dire se una formula o un immagine possa avere una valenza estetica. Uno dei concetti che meglio incarnano questa angolazione è il concetto di sezione aurea. Attorno a tale concetto vogliamo esporre una serie di considerazioni che, pur essendo piuttosto note ad un pubblico specializzato, non sono in realtà dominio dello studioso meno specialistico. È anche difficile trovare nei vari testi una sintesi "in poche cartelle" come quella che noi presentiamo. È questa l'intenzione della nota ed è anche la ragione delle molte figure e della non presenza di una bibliografia potendosi considerare l'argomento nel folclore matematico.

Iniziamo a dare la definizione di sezione aurea. Consideriamo un segmento AB ed un punto X su di esso:



La ***sezione aurea*** è quella parte AX che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante XB. Il segmento AX soddisfa quindi la seguente proporzione:

$$AB : AX = AX : XB$$

Se assumiamo ora AB come unità di misura e denotiamo con x la misura di AX, ricaviamo l'equazione:

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{1}$$

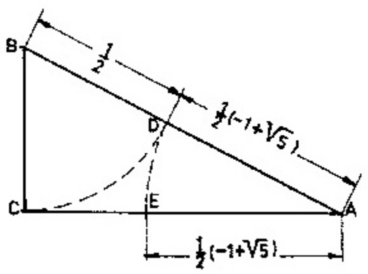
che ammette la radice positiva $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ tale valore fornisce la misura della cosiddetta *sezione aurea*; il *rapporto aureo* cercato, indicato con la lettera j, vale circa 0,618...:

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\Phi \cong -1{,}61803398874989484820458683436563...$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \cong -0{,}61803398874989484820458683436563...$$

dove Φ è detta *grande sezione* e φ è detta *piccola sezione*.

Consideriamo adesso un triangolo rettangolo ABC:



tale che $AB = 1$ e $BC = 1/2$. Allora $AC = \sqrt{5}/2$.

Se ora puntiamo il compasso in C con BC come raggio, individuiamo il punto D; quindi:

$$CD = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad AD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Analogamente, puntando il compasso in A con AD come raggio si individua il punto E e risulta:

$$AE = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{e} \qquad BE = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Inoltre Φ e φ si possono rappresentare come frazione continua o radice continua in modo singolare: l'unica cifra presente è **1**; infatti risulta:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} \quad ; \quad \varphi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} \qquad \textit{frazioni continue}$$

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}} \qquad \textit{radice continua}$$

Si può osservare come, aggiungendo a mano a mano, frazioni o radici di **1** ci si avvicina sempre di più alla sezione aurea; infatti nel primo caso si hanno le successioni:

1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625,... 0, 1, 0.5, 0.667, 0.6, 0.625,...

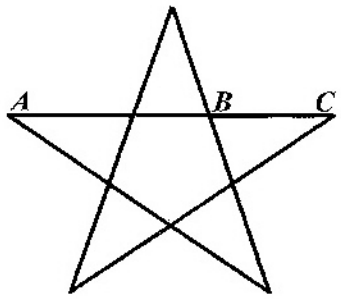
e nel secondo caso:

1, 1.41, 1.594, 1.612, 1.616, 1.617, 1.618, ...

2. CENNI STORICI

La sezione aurea era nota fin dall'antichità; la sua storia infatti ha avuto inizio nella Grecia classica.

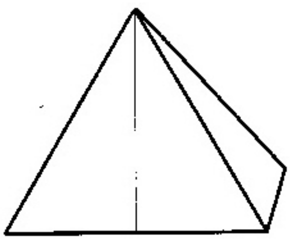
I *Pitagorici* scelsero come simbolo di buona salute la stella a cinque punte perché ogni parte è sezione aurea di un'altra:



Il rapporto AB su BC è la sezione aurea; altrettanto vale per il rapporto AC su AB e per altri rapporti simili nella figura sopra riportata.

Euclide nomina la sezione aurea in diverse parti dei suoi "Elementi"; in particolare nel libro VI, in cui egli applica alla geometria la teoria di Eudosso delle proporzioni, chiama questo rapporto *media ed estrema ragione* e la usa per costruire prima un pentagono regolare e poi i due solidi platonici più complessi, il dodecaedro, che ha 12 facce pentagonali, e l'icosaedro, che è il suo duale. Il significato che questi magnifici poliedri rivestivano per i Greci venne naturalmente trasmesso alla sezione aurea.

Gli *Egiziani* la usarono nel papiro di Rhind come *rapporto sacro* e nella costruzione della piramide di Cheope in cui l'altezza è, con molta approssimazione, la sezione aurea del lato di base.

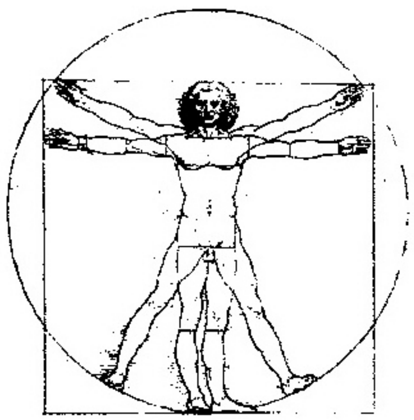


I *Greci* probabilmente usarono tale rapporto in architettura ma non restano prove documentarie. Non vi sono dubbi, invece, sul fatto che esso era consapevolmente utilizzato dagli artisti del *Rinascimento* ai quali era noto come la *proporzione divina*. Gli artisti di questo periodo, infatti, lo utilizzarono per dividere la superficie di un dipinto in parti ben proporzionate così come gli architetti lo usavano normalmente per analizzare le proporzioni di un edificio. La prima edizione italiana del De Architectura di Vitruvio utilizza la sezione aurea per analizzare la facciate del Duomo di Milano.

Luca Pacioli

Il frate Luca *Pacioli* nel 1509 pubblicò il libro De Divina Proportione in cui osservò che era utilizzata, ad esempio, anche nella costruzione del decagono regolare e la riscontrò tra le forme più armoniche della natura. Infatti nel suo libro egli illustrò disegni di solidi platonici, opera del suo amico Leonardo da Vinci il quale fu probabilmente il primo ad usare la denominazione di *sectio aurea*, cioè di *sezione aurea*.

Il *Canone delle proporzioni dell'uomo* di Leonardo



I Greci, infatti, abbastanza sorprendentemente, non avevano trovato alcun termine breve per indicare tale rapporto. Pacioli presentò 13 delle interessanti proprietà di tale rapporto, concludendo che "per amor della salvezza, la lista deve terminare a questo punto" perché 13 era il numero dei presenti alla tavola dell'Ultima Cena. Inoltre egli ridusse le otto operazioni dell'aritmetica a sette in segno di rispetto per i sette doni dello Spirito Santo.

Nel 1600 *Keplero*, che fondava la sua teoria dei cieli sui cinque solidi platonici, si entusiasmava per la proporzione divina e dichiarava che "la geometria ha due grandi tesori, uno è il teorema di Pitagora, l'altro è la divisione di un segmento in media ed estrema ragione: il primo può essere paragonato ad un sacco d'oro, il secondo ad un gioiello prezioso".

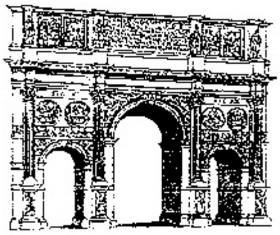
Lo psicologo Gustav *Fechner* usò la sezione aurea per fondare l'estetica su basi sperimentali. Egli misurava incessantemente le dimensioni di quadri, cartoline, libri, tabaccherie, carta da lettere, finestre e mille altre cose nel tentativo di sviluppare un'estetica sperimentale "dal basso". La sua conclusione fu che il rettangolo preferito ha i lati proporzionati secondo la sezione aurea.

L'architetto *Le Corbusier*, in tempi recenti, la usò nel progettare il suo *Modulor*, con cui si può scomporre la figura umana in parti, ognuna sezione aurea di un'altra per poi risalire, da qui, all'abitazione ideale dell'uomo.

I *matematici* di oggi o chiamano la sezione aurea *tau t*, prima lettera della parola greca *tome* (tagliare) oppure usano la lettera greca *j*, seguendo l'esempio di Mark Barr, un matematico americano che la chiamò così in onore dello scultore greco *Fidia*, che se ne servì nella realizzazione delle sue sculture.

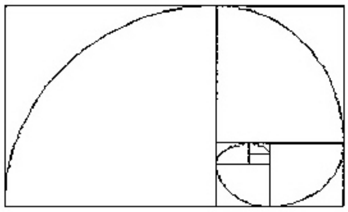
Infine Salvador *Dalì* ha dipinto il suo quadro "Il Sacramento dell'Ultima Cena" in un rettangolo aureo (rettangolo avente un lato che è sezione aurea dell'altro) e vi ha inserito un enorme dodecaedro che, avendo facce pentagonali, mostra un evidente richiamo alla sezione aurea.

Numerose sono le costruzioni architettoniche che si basano sul concetto di sezione aurea. Un esempio è l'*arco di trionfo di Costantino*, di lato riportato, eretto in occasione della vittoria di Costantino a Ponte Milvio (l'altezza dell'arco divide l'altezza totale secondo la sezione aurea, mentre i due archi più piccoli giocano lo stesso ruolo nella distanza tra la base ed il listello inferiore).

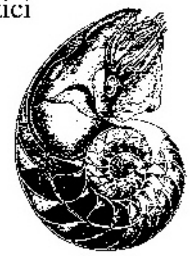


È interessante notare anche come il concetto di sezione aurea sia strettamente collegato al mondo animale e vegetale. In fillotassi, ad esempio, il rapporto tra il numero di giri della spirale lungo la quale sono disposte le foglie ed il numero di foglie stesse che si trovano attorno ad un ramo si evolve secondo la sezione aurea.

Se si disegna ora un rettangolo con lati proporzionali alla sezione aurea, esso può essere suddiviso in un quadrato ed in un altro rettangolo simile al primo; questo procedimento può essere ripetuto all'infinito, come mostrato in figura:



È possibile disegnare una spirale equiangolare che tocca i vertici della sequenza di rettangoli. La figura mostra un'approssimazione eccellente di questa spirale, una successione di quarti di cerchio. La spirale tende verso il punto dove si incontrano tutte le diagonali dei rettangoli aurei. Questa spirale è simile a se stessa, per cui non rappresenta una sorpresa il fatto che la si trovi frequentemente in natura, nella struttura dei fiori di girasole, nelle conchiglie a spirale e nella disposizione di foglie e di rami.



3. IL GIOCO DI WYTHOFF

Un esempio più strettamente matematico di sezione aurea è fornito dal seguente gioco ideato da Wythoff nel 1907.

Consideriamo due mucchi di fiammiferi, due giocatori A e B che, a turno, devono prendere i fiammiferi dai mucchi secondo le seguenti regole:

1) il giocatore prende fiammiferi, in quantità arbitraria, da un solo mucchio;
2) il giocatore prende fiammiferi, in quantità arbitraria ed in numero uguale, da entrambi i mucchi;

Domanda: esiste una strategia vincente per A?

Affinché il giocatore A, che inizia il gioco, vinca è sufficiente che lasci le seguenti quantità:

(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), ...

nel primo mucchio   nel secondo mucchio

cioè, in generale, A deve lasciare la quantità:

$$([n\Phi], [n\Phi] + n) \quad \textit{relazione fondamentale}$$

dove n è un numero qualunque e $[n\Phi]$ è la parte intera.

Quindi da una qualunque mossa dell'avversario, A si può ricondurre ad una quantità dettata sempre dalla stessa legge con n più piccolo. Esplicitando adesso la relazione fondamentale si ottengono i casi particolari precedentemente esposti:

$n = 1$ $([1, 6], [1, 6] + 1) = (1, 2)$
$n = 2$ $([3, 2], [3, 2] + 2) = (3, 5)$
$n = 3$ $([4, 8], [4, 8] + 3) = (4, 7)$
$n = 4$ $([6, 4], [6, 4] + 4) = (6, 10)$
$n = 5$ $([8, 0], [8, 0] + 5) = (8, 13)$
$n = 6$ $([9, 6], [9, 6] + 6) = (9, 15)$ e così via.

4. I NUMERI DI FIBONACCI

In stretta connessione con la sezione aurea è la successione di *Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Leonardo da Pisa, detto *Fibonacci*, si può ritenere il più grande matematico europeo del Medioevo ed oggi è ricordato soprattutto perché, nel XIX secolo, Lucas chiamò con questo nome una successione che si presenta in un problema del suo Liber Abbaci. La prima edizione di questa opera è andata perduta (1202) ma nel 1228 Fibonacci ne elaborò una seconda su richiesta del suo maestro, Scottas, astrologo di corte dell'Imperatore Federico II. A tal fine è interessante conoscere l'esistenza di un giornale trimestrale della Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly*, che ancora oggi si occupa delle rappresentazioni dei numeri di Fibonacci, delle sue proprietà, e così via.