

# **SU ALCUNI METODI PER RAZIONALIZZARE LE SCELTE FRA PIU' ALTERNATIVE VALUTATE CON CRITERI MULTIPLI QUANTITATIVI**

**Antonio MATURO, Giuseppina VARONE**  
**Dip. di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro**  
**Università "G. D'Annunzio", viale Pindaro, 42 - Pescara**

**SOMMARIO** Si presentano alcuni metodi per scegliere quale alternativa, fra quelle appartenenti ad un dato insieme finito, soddisfa maggiormente ad un dato obiettivo.

A tale scopo ogni alternativa A viene valutata in base a più criteri, qualitativi o quantitativi, che forniscono dei punteggi i quali individuano, rispettivamente, delle misure o delle relazioni di preordine fra le alternative.

Vengono poi presentati degli algoritmi che, in funzione dei punteggi ottenuti, permettono di assegnare ad ogni alternativa A un numero reale, compreso fra 0 e 1, il quale indica in che misura l'alternativa A deve essere considerata preferibile alle altre.

## **1. POSIZIONE DEL PROBLEMA**

Vi sono n possibilità di scelta, dette *alternative* o *oggetti*, e k *obiettivi* spesso in contrasto fra loro.

Il raggiungimento o meno di ciascuno degli obiettivi è valutato con uno o più *criteri di scelta* o *variabili*, assegnando, per ogni criterio, un punteggio ad ogni alternativa che indica il "grado" di soddisfacimento dell'obiettivo da parte dell'oggetto.

I punteggi possono rappresentare una valutazione

(a) di tipo quantitativo se indicano una *misura*;

(b) di tipo qualitativo se sono utilizzati esclusivamente per stabilire una *relazione di preordine* fra gli oggetti, ossia una relazione riflessiva e transitiva che indichiamo con  $\leq$ .

Per ogni criterio supponiamo che la relazione sia *totale*.

Siano

$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$  l'insieme delle alternative,

$\mathcal{V} = \{ C_1, C_2, \dots, C_m \}$  l'insieme dei criteri qualitativi,

$\mathcal{W} = \{ D_1, D_2, \dots, D_q \}$  quello dei criteri quantitativi.

Diciamo *punteggio* associato al criterio  $C_j$ , *compatibile* con  $\leq$ , ogni funzione  $P_j: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che,  $\forall r, s \in \{ 1, 2, \dots, n \}$ ,

$$A_r \leq A_s \Rightarrow P_j(A_r) \leq P_j(A_s).$$

Il punteggio si dice *strettamente compatibile* con  $\leq$  se  $\Rightarrow$  è sostituito con  $\Leftrightarrow$ . Il problema di scelta risulta *implicitamente definito* da una matrice bipartita con  $n$  righe ed  $m+q$  colonne del tipo

$$M = \begin{array}{c|cccc}
C_1 & C_2 & \dots & C_j & \dots & C_m \\
\hline
e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1m} \\
e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2j} & \dots & e_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nj} & \dots & e_{nm} \\
\hline
P_1 & P_2 & \dots & P_j & \dots & P_m \\
\hline
D_1 & D_2 & \dots & D_r & \dots & D_q \\
\hline
d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} & \dots & d_{1q} \\
d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} & \dots & d_{2q} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} & \dots & d_{1q} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nr} & \dots & d_{nq} \\
\hline
Q_1 & Q_2 & \dots & Q_r & \dots & Q_q \\
\hline
A_1 \\
A_2 \\
\dots \\
A_1 \\
\dots \\
A_n
\end{array}$$

Diciamo *punteggio* associato al criterio quantitativo  $D_r$  ogni funzione

$$Q_r : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$$

esprimente le misure attribuite alle varie alternative con il criterio  $D_r$ .

Nella matrice  $M$  risulta  $e_{1j} = P_j(A_1)$ ,  $d_{1r} = Q_r(A_1)$ .

## 2. METODO DEL REGIME

Limitiamoci, per il momento, allo studio di problemi di scelta basati su criteri solo di tipo qualitativo.

La matrice  $M$  per  $q=0$  si riduce alla seguente

$$E = \begin{array}{cccc|c} C_1 & C_2 \dots C_j \dots & C_m & & \\ \hline e_{11} & e_{12} \dots e_{1j} \dots e_{1m} & & & A_1 \\ e_{21} & e_{22} \dots e_{2j} \dots e_{2m} & & & A_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ e_{11} & e_{12} \dots e_{1j} \dots e_{1m} & & & A_1 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} \dots e_{nj} \dots e_{nm} & & & A_n \\ \hline P_1 & P_2 \dots P_j \dots & P_m & & \end{array}, \quad e_{ij} = P_j(A_i).$$

Siano

$$\underline{a}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im})^t, \quad (\text{detto vettore associato ad } A_i),$$

$$\underline{c}_j = (e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{nj})^t, \quad (\text{detto vettore associato a } C_j).$$

$$\text{Poniamo, } \forall a \in \mathbb{R}, s(a) = \begin{cases} 0 & \text{per } a=0 \\ \frac{a}{|a|} & \text{per } a \neq 0. \end{cases}$$

Per ogni  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)^t \in \mathbb{R}^r$  poniamo

$$s(\underline{a}) = \left( s(a_1), s(a_2), \dots, s(a_r) \right)^t.$$

Siano inoltre  $\underline{d}_{hk} = \underline{a}_h - \underline{a}_k$  (detto vettore delle differenze per la coppia  $(A_h, A_k)$ ) e  $\underline{r}_{hk} = s(\underline{d}_{hk})$  (detto vettore di regime per la coppia  $(A_h, A_k)$ ).

Chiamiamo *matrice delle differenze* quella avente per colonne i vettori delle differenze  $\underline{d}_{hk}$  con  $h \neq k$ , ossia la matrice

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} d_{12} & d_{13} \dots d_{1n} & d_{21} & d_{23} \dots d_{2n} & \dots & d_{11} & d_{12} & \dots \\ \hline d_{1(1-1)} & d_{1(1+1)} \dots d_{1n} & \dots & d_{n1} & d_{n2} \dots d_{n(n-1)} & \dots & \dots & \dots \end{array} \right].$$

Chiamiamo *matrice di regime* quella avente per colonne i vettori di regime  $\underline{r}_{hk}$  con  $h \neq k$ , ossia la matrice

$$R = \left[ \begin{array}{c|c|c} r_{12} & r_{13} \dots r_{1n} & r_{21} & r_{23} \dots r_{2n} & \dots & r_{11} & r_{12} & \dots \\ \hline r_{1(1-1)} & r_{1(1+1)} \dots r_{1n} & \dots & r_{n1} & r_{n2} \dots r_{n(n-1)} & \dots & \dots & \dots \end{array} \right].$$

Diciamo *peso* ogni funzione

$$W : \left\{ C_1, C_2, \dots, C_m \right\} \rightarrow [0,1]$$

tale che  $W(C_1) \leq W(C_j) \Leftrightarrow$  il criterio  $C_1$  è considerato "non più importante" di  $C_j$ .

Poniamo  $W_1 = W(C_1)$ ,  $\underline{W} = (W_1, W_2, \dots, W_m)^t$ .

Il concetto di "non più importante" viene precisato se è assegnata una relazione  $\leq$  di preordine fra i criteri. In tal caso consideriamo il peso come un vettore aleatorio con supporto  $[0,1]^m$  tale che  $C_1 \leq C_j \Leftrightarrow W_1 \leq W_j$ .

I pesi si possono ottenere nel seguente modo.

Si considera una variabile casuale  $X$  con supporto  $[0,1]$  ed un campione casuale di ampiezza  $m$ , della  $X$ ,  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ .

Si pone  $W_1$  uguale alla statistica ordinale di ordine  $m-i+1$ .

In particolare  $W_1 \geq W_2 \geq W_3 \geq \dots \geq W_m$ .

Si ha che, se  $F(x)$  è la funzione di ripartizione della  $X$ , allora la  $W_1$  ha funzione di ripartizione

$$G_1(y) = \sum_{\ell=m-i+1}^m \binom{m}{\ell} [F(x)]^\ell \cdot [1-F(y)]^{m-\ell}$$

Se la  $X$  ha distribuzione UC  $[0,1]$  allora, derivando, si vede che la  $W_1$  ha densità

$$g_1(y) = \binom{m}{m-i+1} (m-i+1) \cdot y^{m-i} (1-y)^{i-1},$$

ossia  $W_1$  è una  $\beta(m-i+1, i)$ , variabile casuale beta di parametri  $(m-i+1, i)$ , dove

$$\beta(r,s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

è l'integrale euleriano di prima specie.

$$\text{Sia } \underline{r}_{1s} = (\sigma_{1s1}, \sigma_{1s2}, \dots, \sigma_{1sm})^t.$$

Si ammette che la scelta fra le alternative  $A_1$  e  $A_s$  sia in base al valore assunto dalla funzione aleatoria

$$V_{1s} = \sum_{j=1}^m \sigma_{1sj} \cdot W_j$$

esprime il "grado di soddisfazione" nella scelta di  $A_1$  rispetto ad  $A_s$ .

La matrice  $V$ , di termine generale  $V_{1s}$ , si ottiene dalla matrice  $R$ , di regime, e dal vettore casuale  $W$  ponendo

$$V = W^t \cdot R.$$

La matrice  $V$  è un vettore riga con  $n(n-1)$  colonne.

Sia  $(A_1, A_s)$  una coppia di alternative distinte.

Diciamo *probabilità per la dominanza* di  $A_1$  rispetto ad  $A_s$  il numero

$$p_{1s} = \text{prob}(V_{1s} > 0).$$

Diciamo matrice delle *probabilità di dominanza* la seguente

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_s & \dots & A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & \dots & p_{1s} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & \dots & p_{2s} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{js} & \dots & p_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{ns} & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

L'idea di base è di considerare una alternativa  $A_i$  preferibile all'alternativa  $A_j$  se il vettore riga  $i$  della matrice  $P$  ha gli elementi, disposti in ordine decrescente, rispettivamente maggiori o uguali a quelli, anch'essi disposti in ordine decrescente, della riga  $j$ .

In generale, in questa maniera si ottiene una relazione d'ordine non totale.

Per ottenere un ordinamento totale si può sostituire ad ogni vettore riga una media che può essere la media aritmetica, la media geometrica ( se le probabilità sono tutte positive ), la media quadratica o la mediana.

La media più utilizzata è la media aritmetica, ossia ad ogni alternativa  $A_i$  si associa il numero

$$p_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

### 3. CRITERI DI VALUTAZIONE DELLE $p_{is}$

Per calcolare la  $p_{is}$  occorre determinare, in  $\mathbb{R}^m$ , la zona A soddisfacente il sistema di disequazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \sigma_{isj} \cdot W_j \geq 0 \\ W_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \\ W_j \geq W_{j+1}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m-1\} \end{array} \right.$$

In corrispondenza si ottiene

$$p_{is} = \int_A g(w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot dw_1 \cdot dw_2 \cdot \dots \cdot dw_m$$

con  $g$  funzione di densità di probabilità della variabile casuale  $m$ -dimensionale  $(W_1, W_2, \dots, W_m)$ .

Nel caso in cui  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  ha distribuzione uniforme la  $g(W_1, W_2, \dots, W_m)$  è uniforme nella zona  $S$  soddisfacente le disequazioni

$$W_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$W_j \geq W_{j+1}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

per cui, dette  $m(A)$  e  $m(S)$  le misure di  $A$  ed  $S$ , risulta

$$p_{is} = \frac{m(A)}{m(S)}.$$

I calcoli risultano alquanto elaborati già per  $m \geq 4$ .

Per  $m$  elevato, in pratica, è necessario calcolare le  $p_{is}$  con il metodo di Montecarlo.

Si genera una successione di lunghezza  $N$  di campioni casuali empirici

$$\underline{x}^{(r)} = \left( x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_m^{(r)} \right), r=1, 2, \dots, N$$

determinazioni indipendenti della variabile casuale  $X$ .

Se  $\underline{y}^{(r)} = \left( y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \dots, y_m^{(r)} \right)$  è la permutazione ottenuta

da  $\underline{x}^{(r)}$  tale che  $y_1 \geq y_{1+1}, \forall i < m$ , allora si pone

$$v_{1s}^{(r)} = \sum_{j=1}^m \sigma_{1sj} y_j^{(r)}.$$

Posto  $N_p = \left| \left\{ r \in \{1, 2, \dots, N\} : v_{1s}^{(r)} > 0 \right\} \right|$ , si assume

$$p_{1s} = \text{prob} \left( V_{1s} > 0 \right) \cong \frac{N_p}{N}.$$

#### 4. UN ESEMPIO

Antonio vuole acquistare una macchina scegliendo una delle seguenti

A1) ALFA 33

A2) AUDI 80

A3) PEUGEOT 405

I criteri per la scelta sono i seguenti

C<sub>1</sub>) ripresa

C<sub>2</sub>) comodità

C<sub>3</sub>) costo

C<sub>4</sub>) estetica

Valutando i dati esposti da riviste specializzate, ad esempio QUATTORRUOTE, GENTE MOTORI, L'AUTOMOBILE etc..., si arriva stabilire la seguente matrice dei punteggi



$$p_{12} = \text{prob}\left(V_{12} > 0\right) = \text{prob}\left(W_1 - W_2 + W_3 - W_4 > 0\right),$$

$$p_{13} = \text{prob}\left(V_{13} > 0\right) = \text{prob}\left(W_1 - W_2 - W_3 - W_4 > 0\right),$$

$$p_{23} = \text{prob}\left(V_{23} > 0\right) = \text{prob}\left(W_1 - W_2 - W_3 + W_4 > 0\right).$$

Assumiamo l'ipotesi che la variabile casuale  $X$  abbia distribuzione uniforme continua in  $[0,1]$ .

Allora la densità di probabilità congiunta è uniforme nella zona  $S$  soddisfacente le disequazioni

$$W_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$W_j \geq W_{j+1}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}.$$

Poniamo  $W_{j-1}^* = W_j / W_1$ . Si può verificare che la terna  $(W_1^*, W_2^*, W_3^*)$  ha distribuzione uniforme nella zona  $S^*$  soddisfacente le disequazioni

$$W_1^* \geq 0, \quad W_2^* \geq 0, \quad W_3^* \geq 0$$

$$W_1^* > W_2^* > W_3^*.$$

Come si può verificare con semplici operazioni geometriche, il volume della zona  $S^*$  è  $1/6$ .

Le probabilità di dominanza si possono esprimere come

$$P_{12} = \text{prob} \left( 1 - W_1^* + W_2^* - W_3^* > 0 \right),$$

$$P_{13} = \text{prob} \left( 1 - W_1^* - W_2^* - W_3^* > 0 \right),$$

$$P_{23} = \text{prob} \left( 1 - W_1^* - W_2^* + W_3^* > 0 \right).$$

Poichè  $W_1^* < 1$ ,  $W_3^* < W_2^*$ , l'espressione  $1 - W_1^* + W_2^* - W_3^*$  è positiva,  $\forall (x,y,z) \in S^*$  e quindi  $p_{12}=1$ .

La zona D intersezione di  $S^*$  con il semispazio di equazione  $1 - W_1^* - W_2^* - W_3^* > 0$  è un tetraedro avente volume  $1/36$ .

Poichè la distribuzione delle terne  $(W_1^*, W_2^*, W_3^*)$  è uniforme in  $S^*$  risulta

$$P_{13} = \frac{\text{volume}(D)}{\text{volume}(S^*)} = 1/6.$$

La zona H intersezione di  $S^*$  con il semispazio  $1 - W_1^* - W_2^* + W_3^* > 0$  è un tetraedro avente volume  $1/12$ . Segue che

$$P_{23} = \frac{\text{volume}(H)}{\text{volume}(S^*)} = 1/2.$$

La matrice delle probabilità di dominanza è la seguente

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 5/6 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Utilizzando il criterio della media aritmetica i numeri

associati alle alternative  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  sono rispettivamente

$$p_1 = 1/12, \quad p_2 = 1/4, \quad p_3 = 2/3,$$

per cui le alternative vanno ordinate nel seguente modo

$$A_3 > A_1 > A_2.$$

La macchina scelta è la PEUGEOT 405.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Albers, L.H. *Het gewichtloze gewogen, cultuurhistorische betekenis van landgoederen geevalueerd met behulp van multicriteria analyse*. Delftse Universitaire Pers, Delft, 1987.
2. Albers, L., P. Nijkamp. "Multidimensional analysis for plan or project evaluation; how to fit the right method to the right problem". Procedures of the conference at Capri, Napoli, April 1988.
3. Dall'Aglio G. "Calcolo delle probabilità", Zanichelli, Bologna.
4. Delft, A. van and Nijkamp, P. (1977). *Multicriteria Analysis and Regional Decision-Making*, The Hague/Boston: Martinus Nijhoff.
5. Hinloopen, E., Nijkamp, P. and Rietveld, P. (1983). "Qualitative discrete multiple criteria choice models in regional planning", *Regional Science and Urban Economics* 13: pp 77-102.
6. Hinloopen, E. (1985). *De Regime Methode*, M.A. Thesis, Interfaculty Actuarial and Econometrics, Free University, Amsterdam (minimeographed)
7. Hinloopen, E. and Smyth, A.W. (1985). "A description of

principles of a new multicriteria evaluation technique, The Regime Method", in *Proceedings Colloquium Vervoerplanologisch Speurwerk*, Delft, pp. 422-431.

8. Keeney, R. and Raiffa, H. (1976). *Decision with Multiple Objectives, Preferences and Value Tradeoffs*. New York: Wiley.

9. Kmiotowicz, Z.W. and Pearman, A.D. (1981). *decision Theory and Incomplete Knowledge*. Aldershot: Gower.

10. Lancaster, K. (1971). *Consumer Demand*. New York: Columbia University Press.

11. Lootsma, T.A. (1980). "Saaty's Priority Theory and the nomination of a senior professor in operation research", *European Journal of Operational Research* 4: pp.380-388.

12. Mastenbroek, P and Paelinck, J.H.P. (1977). "Qualitative multicriteria analysis-applications to airport location", *environment and Planning A* 9(8): pp. 883-895.

13. Nijkamp, p. and Voogd, H. (1981). "New multicriteria methods for physical planning by means of multidimensional scaling techniques", pp.19-30 in Haimes, Y. and Kindler, J. (eds.), *Water and Related Land Resource System*. Oxford: Pergamon Press.

14. Nijkamp, P., Leitner H. and Wrigley N. (eds.) (1985). *Measuring the Unmeasurable*, Dordrecht: Martinus Nijhoff.

15. Rietveld, P. (1980) *Multi Objective Methods and Regional Planning*, Amsterdam: North-Holland Publ.Co.

16. Saaty, T.I. (1977). "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *journal of Mathematical Psychology* 15: pp.234-281
17. Taha, H. A. (1976). *Operations Research*, New York: Macmillan.
18. Voogd, H. (1983). *Multicriteria Evalutation for Urban and Regional Planning*. London: Pion