

# CHI MUOVE I FILI DEL MERCATO AZIONARIO ?\*

M. CENCI - A.M. CERQUETTI  
Università "G. D'Annunzio" - Pescara

## 1. Introduzione

Recentemente vari Autori [3], [4], [5] si sono occupati della modellizzazione del comportamento degli agenti che operano, secondo un atteggiamento fondamentalista, nel mercato finanziario; essi hanno ritenuto particolarmente efficace, da un punto di vista applicativo, suddividere tali operatori finanziari, sulla base delle loro possibilità di accesso sia alle informazioni sia al mercato stesso, in tre categorie individuate da:

- 1) agenti specialisti (S.), che costituiscono la classe privilegiata del mercato azionario, perchè hanno libero accesso alle fonti di informazione, anche riservate, sulla base delle quali stabiliscono il prezzo dei titoli;
- 2) agenti professionisti (P.) che possono negoziare in ogni istante con lo S., dispongono delle informazioni durante tutta la seduta ed eseguono gli ordini commissionati dai non professionisti;
- 3) agenti non professionisti (N.P.) che non hanno accesso diretto al mercato, possono dare ordini irrevocabili solo all'inizio della sessione disponendo delle informazioni relative alla sessione precedente.

---

\* Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca MURST 40% dal titolo "Modellizzazione della microstruttura dei mercati finanziari" - Coordinatore nazionale Prof. L. Peccati che le A. A. ringraziano per i suoi utili suggerimenti.

In tutti i lavori citati si evidenzia che è la prima categoria di agenti quella che muove , in modo determinante, i fili del mercato.

In questa Nota si intende analizzare in maniera più approfondita, come lo S. possa "forzare" tramite le sue opinioni, sintetizzate dal proprio valore fondamentale (v.f.), l'andamento del mercato stesso.

Allo scopo i sistemi di equazioni alle differenze, che, negli articoli citati, regolano l'evoluzione del mercato, sono stati ricondotti ciascuno ad un' unica equazione alle differenze lineare, del secondo ordine, dove soltanto il termine noto tiene conto del v.f. dello specialista.

Contrariamente a quanto fatto in precedenza, non sono state avanzate ipotesi preliminari sulla variazione del v.f. dello S..

Ciascuna delle equazioni alle differenze così ottenute sintetizza l'evoluzione del mercato attraverso la variazione di una delle grandezze prescelta quale incognita e consente di determinare la soluzione generale che, sostituita poi nelle equazioni del sistema iniziale, permette di ottenere tutte le altre grandezze del sistema.

L'equilibrio del mercato e, in particolare la sua stabilità, saranno pertanto ricondotti alla stabilità di tale soluzione.

Per comodità di lettura verranno trascritti i sistemi di equazioni alle differenze sia nell'ambito di una sessione, sia da sessione a sessione, con una succinta descrizione delle grandezze e delle equazioni che in essi figurano e rinviando ai lavori citati, per informazioni più dettagliate.

## **2. Evoluzione del mercato dentro una sessione**

Con riferimento ad un titolo quotato, si indichi con  $B_n(T)$  la quantità negoziata dal P. dall'inizio della T-esima sessione fino all'n-esima chiamata;  
 $h_n(T)$  e  $K_n(T)$  i v.f. del P. e dello S. relativi al titolo in esame, nella n-esima chiamata;

$Q(T)$  l'ammontare delle transazioni effettuate dal N.P. all'inizio della T-esima sessione.

L'evoluzione del mercato, nell'ambito di una sessione [3], è regolata dal sistema

$$(2.1) \quad \begin{cases} B_n(T) - B_{n-1}(T) = -\beta[P_{n-1}(T) - h_n(T)] \\ P_n(T) = K_n(T) + \eta[Q(T) + B_n(T)] \\ h_n(T) = h_{n-1}(T) - \delta[B_{n-1}(T) - B_{n-2}(T)] \end{cases}$$

dove  $\beta, \eta, \delta$  sono parametri positivi e dove:

- la prima equazione modella il comportamento del P. che può intervenire autonomamente nel mercato, impartendo ordini di acquisto o di vendita, a seconda che il proprio v.f. sia superiore o inferiore al prezzo del titolo stabilito nella chiamata precedente;
- la seconda equazione modella il comportamento dello S. che fissa il prezzo del titolo ad ogni chiamata sulla base del proprio v.f. e del numero delle transazioni globalmente avvenute dall'inizio della sessione fino a quel momento;
- nella terza equazione si suppone che le opinioni del P. varino tenendo conto del trend  $B_{n-1}(T) - B_{n-2}(T)$  relativo alle due chiamate precedenti.

Con opportune trasformazioni, il sistema (2.1) può essere ricondotto all'unica equazione alle differenze

$$(2.2) \quad B_n(T) - (2 - \delta\beta - \beta\eta)B_{n-1}(T) + (1 - \delta\beta - \eta\beta)B_{n-2}(T) = -\beta[K_{n-1}(T) - K_{n-2}(T)]$$

lineare, del secondo ordine, avente come incognita la funzione  $B_n(T)$ .

Il termine noto della (2.2), che risulta proporzionale alla variazione del v.f. dello S. nelle due chiamate precedenti l'n-esima, non appare nella forma "canonica" proposta dalla letteratura che prevede, per il termine noto, una quantità proporzionale a  $K_{n-2}(T)$ , ma ad essa può sempre ridursi non appena si avanzino delle ipotesi sulla variazione, da chiamata a chiamata, del v.f. dello S..

L'equazione caratteristica associata alla (2.2) è:

$$(2.3) \quad \lambda^2 - (2 - \eta\beta - \beta\delta)\lambda + (1 - \eta\beta - \beta\delta) = 0$$

che fornisce le radici

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 - \beta\delta - \beta\eta$$

Poichè tra le radici dell'equazione (2.3) figura il valore  $\lambda=1$ , si può concludere che, indipendentemente dal comportamento dello S., non ci sarà mai stabilità generale del mercato.

Poichè  $\lambda=1$  è radice semplice, si può tutt'al più parlare di stabilità secondo Lyapunov, a condizione che sia  $|1 - \beta\delta - \beta\eta| < 1$  e sotto opportune ipotesi da farsi sulla variazione del v.f. dello S., sulle quali, per ora, non intendiamo soffermarci.

### 3. Evoluzione del mercato da sessione a sessione

Il sistema di equazioni alle differenze che descrive l'evolversi del mercato da sessione a sessione [3] e [5] è

$$(3.1) \quad \begin{cases} Q(T) = -\alpha[P(T-1) - r(T)] \\ B(T) = -\beta[P(T-1) - h(T)] - Q(T) \\ P(T) = K(T) + \eta[Q(T) + B(T)] \\ r(T) = (1 - \omega)r(T-1) + \omega P(T-1) \\ h(T) = h(T-1) - \Omega[Q(T-1) + B(T-1)] \end{cases}$$

dove  $Q(T)$ ,  $B(T)$ ,  $P(T)$ ,  $h(T)$  hanno significati analoghi a quelli già espressi nel paragrafo precedente e relativi alle varie epoche entro una sessione;  $r(T)$  è il v.f. del N.P. ed  $\alpha, \beta, \eta, \Omega, \omega$  sono parametri positivi, con  $\omega \in [0, 1]$ . Descriviamo in breve le equazioni del sistema (3.1), nell'ordine di presentazione:

- L'agente N.P., che non entra direttamente nel mercato, agendo esclusivamente da fondamentalista, impartisce ordini di acquisto o di vendita a seconda che il proprio v.f. sia superiore o inferiore al fixing della sessione precedente.
- L'agente P., che ha accesso diretto al mercato, oltre ad eseguire gli ordini impartiti dal N.P., può intervenire come figura autonoma, agendo da fondamentalista.

- Lo S. fissa il prezzo del titolo sulla base del proprio v.f. e sul numero delle transazioni globalmente avvenute nella T-esima sessione.

- Infine, nelle ultime due equazioni, si suppone che le opinioni del N.P. e del P., sintetizzate nel loro v.f. dipendano linearmente, le prime, dal prezzo del titolo e le seconde, dalle transazioni della sessione precedente.

Con opportune trasformazioni, il sistema (3.1) può essere ricondotto all'unica equazione

$$(3.2) \quad h(T+2) - (1-\eta\beta - \Omega\beta)h(T+1) - \eta\beta h(T) = \beta\Omega K(T)$$

alle differenze, lineare, del secondo ordine, avente come funzione incognita il v.f.  $h(T)$  del P.; il secondo membro della (3.2) è una grandezza proporzionale al v.f. dello S..

L'integrale generale della (3.2), come noto, è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare dell'equazione completa.

L'equazione caratteristica associata alla (3.2) è

$$(3.3) \quad \lambda^2 - (1-\eta\beta - \beta\Omega)\lambda - \eta\beta = 0$$

che fornisce le radici

$$\lambda_i = (1-\eta\beta - \beta\Omega \pm \sqrt{\Delta}) / 2 \quad i=2,1$$

con  $\Delta = (1-\eta\beta - \beta\Omega)^2 + 4\eta\beta > 0$ .

L'integrale generale dell'equazione omogenea è pertanto:

$$(3.4) \quad h(T) = c_1 \lambda_1^T + c_2 \lambda_2^T \quad c_1, c_2 \in \mathfrak{R}.$$

Si prova che  $\lambda_1 < 0$  e  $0 < \lambda_2 < 1$ .

La condizione  $|\lambda_i| < 1$ , necessaria e sufficiente per la stabilità dell'equazione omogenea associata è espressa dalla disuguaglianza

$$(3.5) \quad \beta(\Omega + 2\eta) < 2,$$

in perfetta rispondenza con quanto ottenuto in [3] cui si rinvia anche per le considerazioni di carattere economico che suggerisce.

L'integrale generale dell'equazione alle differenze completa (3.2) può calcolarsi con il metodo della variazione dei parametri, secondo cui si suppone che detta soluzione sia del tipo

$$(3.6) \quad h(T) = c_1 \lambda_1^T + c_2 \lambda_2^T$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono funzioni, da determinarsi, del parametro  $T$ , che debbono soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1^{T+1} \Delta c_1(T) + \lambda_2^{T+1} \Delta c_2(T) = 0 \\ \lambda_1^{T+2} \Delta c_1(T) + \lambda_2^{T+2} \Delta c_2(T) = \beta \Omega K(T) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \Delta c_1(T) = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{K(T)}{\lambda_1^{T+1}} \\ \Delta c_2(T) = \frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{K(T)}{\lambda_2^{T+1}} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} c_1(T) = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \Delta^{-1} \left( \frac{K(T)}{\lambda_1^{T+1}} \right) = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{\Delta} \left( \frac{K(T)}{\lambda_1^{T+1}} \right) = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{E-1} \left( \lambda_1^{-T} \frac{K(T)}{\lambda_1} \right) \\ \quad = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_1} \right)^T \frac{1}{\frac{1}{E}-1} \left( \frac{K(T)}{\lambda_1} \right) = -\frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_1} \right)^T \frac{1}{E-\lambda_1} (K(T)) + e_1 \\ c_2(T) = \frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_2} \right)^T \frac{1}{E-\lambda_2} (K(T)) + e_2 \end{cases}$$

dove  $e_1$  e  $e_2$  sono costanti arbitrarie.

(1) Si ricorda che

(a) gli operatori  $\Delta$  ed  $E$  sono legati dalla relazione  $E=1+\Delta$

(b) vale per l'operatore  $E$  la proprietà:

$$\frac{1}{\Phi(E)} (\beta^T F(T)) = \beta^T \frac{1}{\Phi(\beta E)} F(T)$$

L'integrale generale della (3.2) è allora

$$h(T) = e_1 \lambda_1^T + e_2 \lambda_2^T + \frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \frac{1}{(1 - \lambda_2) + \Delta} - \frac{1}{(1 - \lambda_1) + \Delta} \right] K(T)$$

e, dopo gli opportuni sviluppi in serie

$$(3.7) \quad h(T) = e_1 \lambda_1^T + e_2 \lambda_2^T + \frac{\beta \Omega}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1 - \lambda_2)^i} - \frac{1}{(1 - \lambda_1)^i} \right] \Delta^i K(T) \dots$$

da cui

$$(3.8) \quad h(T) = e_1 \lambda_1^T + e_2 \lambda_2^T + h^*(T)$$

dove si evidenzia come  $h(T)$  sia somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di un integrale particolare  $h^*(T)$  dell'equazione completa.

Il v.f.  $h(T)$  del professionista viene a dipendere dal comportamento dello S. solo attraverso la soluzione particolare  $h^*(T)$  dell'equazione completa, in quanto i primi due addendi della (3.7) non tengono conto di input suggeriti dallo S..

Sarà interessante pertanto studiare le proprietà analitiche di  $h^*(T)$  in relazione a proprietà generali per il v.f.  $K(T)$  dello specialista. Sostituendo a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  i valori calcolati in precedenza  $h^*$  può essere scritto:

$$h^*(T) = K(T) + A_1 \Delta K(T) + A_2 \Delta^2 K(T) + A_3 \Delta^3 K(T) + \dots$$

$$\text{con } A_1 = \frac{1 + \eta \beta + \beta \Omega}{\beta \Omega} > 0$$

$$A_2 = \left( \frac{1 + \eta \beta + \beta \Omega}{\beta \Omega} \right)^2 - \frac{1}{\beta \Omega} > 0$$

$$A_3 = \left( \frac{1 + \eta \beta + \beta \Omega}{\beta \Omega} \right)^3 - \frac{1 + \eta \beta + \beta \Omega}{2\beta^2 \Omega^2} > 0 \dots$$

Si ha inoltre

$$\Delta h^*(T) = \Delta K(T) + A_1 \Delta^2 K(T) + A_2 \Delta^3 K(T) + A_3 \Delta^4 K(T) + \dots$$

$$\Delta^2 h^*(T) = \Delta^2 K(T) + A_1 \Delta^3 K(T) + A_2 \Delta^4 K(T) + \dots$$

Si osserva quanto segue

$$\Delta^i K(T) \geq 0, \forall i \Rightarrow \Delta^i h^*(T) \geq 0 \text{ rispettivamente.}$$

In particolare ciò si interpreta nel seguente modo: se  $K(T)$  è crescente ( $\Delta K(T) > 0$ ) e convessa ( $\Delta^2 K(T) > 0$ ) oppure decrescente e concava allora anche  $h^*(T)$  è rispettivamente crescente e convessa oppure decrescente e concava facendo quindi registrare una perfetta concordanza tra l'andamento del v.f. dello S. e l'integrale particolare  $h^*(T)$ .

Esaminiamo ora le condizioni che debbono verificarsi per i parametri del sistema, affinché, partendo da ipotesi analitiche sulla funzione  $K(T)$ , diverse da quelle considerate, si possa dedurre un comportamento conseguente per la funzione  $h^*(T)$ . A tal fine si osserva che i coefficienti delle differenze  $\Delta^i K(T)$  nella (3.7) costituiscono una sequenza a termini positivi, decrescente e convessa; si può pertanto ritenere che una approssimazione di  $h^*(T)$

$$h^*(T) = K(T) + A_1 \Delta K(T)$$

sia, da un punto di vista pratico, accettabile.

In tali ipotesi si ha:

$$\begin{aligned} \Delta h^*(T) &= \Delta K(T) + A_1 \Delta^2 K(T) = (1-A_1)\Delta K(T) + A_1 \Delta K(T+1) \\ \Delta^2 h^*(T) &= \Delta^2 K(T) + A_1 \Delta^3 K(T) = (1-A_1)\Delta^2 K(T) + A_1 \Delta^2 K(T+1). \end{aligned}$$

Lo studio del segno delle differenze  $\Delta K(T)$ ,  $\Delta^2 K(T)$ , effettuato allo scopo di dedurre, conseguentemente il segno di  $\Delta h^*(T)$  e  $\Delta^2 h^*(T)$ , ha portato ai seguenti risultati.

Preliminarmente osserviamo che se, le differenze  $\Delta^i K(T)$ ,  $i=1,2$  sono concordi, i rapporti  $\frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)}$  e  $\frac{\Delta^2 K(T+1)}{\Delta^2 K(T)}$ , che scaturiscono dallo studio rispettivamente della monotonia e della convessità di  $h^*(T)$ , sono maggiori dell'unità, mentre se le differenze  $\Delta^i K(T)$ ,  $i=1,2$  sono discordi, i rapporti  $\frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)}$  e  $\frac{\Delta^2 K(T+1)}{\Delta^2 K(T)}$  risultano inferiori all'unità.

I risultati conseguiti possono così sintetizzarsi: se suddividiamo l'intervallo  $(0, +\infty)$  nei due sub-intervalli

$$I_d = \left(0, \frac{1+\eta\beta}{1+\beta\Omega+\beta\eta}\right), \quad I_c = \left(\frac{1+\eta\beta}{1+\beta\Omega+\beta\eta}, +\infty\right)$$

che potremmo denominare rispettivamente di discordanza e di concordanza, si è stabilito che, a seconda che i rapporti  $\frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)}$  e/o  $\frac{\Delta^2 K(T+1)}{\Delta^2 K(T)}$  cadano in  $I_d$  oppure in  $I_c$ , non si conservano ovvero si conservano per  $h^*(T)$  le proprietà analitiche di monotonia e/o convessità ipotizzate per  $K(T)$ .

A titolo di esempio se

$$(\Delta K(T) > 0) \wedge (\Delta^2 K(T) < 0)$$

secondo cui la sequenza  $K(T)$  risulta crescente e concava, conseguentemente si ha

$$\text{crescente se } \frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)} \in \left( \frac{1+\eta\beta}{1+\beta\Omega+\beta\eta}, 1 \right) \subset I_c$$

$h^*(T)$

$$\text{decrescente se } \frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)} \in I_d$$

$$\text{convessa se } \frac{\Delta^2 K(T+1)}{\Delta^2 K(T)} \in I_d$$

$h^*(T)$

$$\text{concava se } \frac{\Delta^2 K(T+1)}{\Delta^2 K(T)} \in \left( \frac{1+\eta\beta}{1+\beta\Omega+\beta\eta}, 1 \right) \subset I_c.$$

Pertanto le proprietà di monotonia e concavità ipotizzate per  $K(T)$  si conservano per  $h^*(T)$  soltanto se i rapporti  $\frac{\Delta^i K(T+1)}{\Delta^i K(T)}$  ( $i=1,2$ ) cadono

nell'intervallo  $\left( \frac{1+\eta\beta}{1+\beta\Omega+\beta\eta}, 1 \right) \subset I_c$ .

In particolare se  $\frac{\Delta K(T+1)}{\Delta K(T)} = 1$  sia  $K(T)$ , sia  $h^*(T)$  hanno un andamento

lineare.

#### 4. Considerazioni sulla stabilità

La condizione (3.5) ci assicura la stabilità della soluzione dell'equazione omogenea associata alla (3.2). Per quanto concerne la stabilità della soluzione (3.8) dell'equazione non omogenea, è necessario avanzare delle ipotesi sull'andamento della funzione  $K(T)$ , che non potrà essere arbitraria, in quanto dovrà convergere al divergere di  $T$ .

Risultano pertanto di particolare interesse i casi

a)  $K(T)$  è crescente, concava e superiormente limitata

b)  $K(T)$  è decrescente, convessa e inferiormente limitata.

In entrambi i casi  $h^*(T)$ , e quindi anche  $h(T)$  è stabile se, oltre alla (3.5) risulta

$$\left( \frac{\Delta^i K(T+1)}{\Delta^i K(T)} \in I_c, i=1,2 \right) \vee \left( \frac{\Delta^i K(T+1)}{\Delta^i K(T)} \in I_d, i=1,2 \right)$$

In tutti gli altri casi non si può parlare di stabilità per l'integrale generale.

## **Bibliografia**

- [1] R. Bellman, K.L. Cooke, "Differential - Difference Equations", Academic Press, New York, 1963.
- [2] E. Castagnoli, L. Peccati, "Metodi Matematici per l'analisi economica" ETAS, 1979.
- [3] M. Cenci, A. M. Cerquetti, "Modelli evolutivi per un mercato azionario con valori fondamentali variabili nel tempo e asimmetria di informazioni", Atti XV Convegno AMASES, Grado, 1991.
- [4] L. Ferrari, L. Peccati, "Stock - Market Behaviour and Imitation: a Simple Model", 6<sup>th</sup> Meeting of the Euro Working Group on Financial Modelling, Lieges, 1989.
- [5] L. Ferrari, E. Luciano, L. Peccati, "Institutionally Different Agents in an Imitative Stock-Market with Asymmetric Information", 8<sup>th</sup> Meeting of the Euro Working Group on Financial Modelling, Gieten, 1990.
- [6] G. Gandolfo, "Metodi di dinamica economica", ISEDI, Milano, 1973.
- [7] M. L. Spiegel, "Differenze finite ed equazioni alle differenze", Collana Schaum, ETAS, 1981.