Università degli Studi di Teramo
Facoltà di Scienze Politiche

Corso di Laurea in Statistica

Lezioni del Corso di Matematica

a cura di

D. Tondini

a.a. 2003/2004

CAPITOLO II
LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. GENERALITÀ

È opportuno sottolineare innanzitutto come le equazioni differenziali costituiscano lo strumento più importante ed efficace che l'Analisi Matematica possa offrire ad ogni ramo delle Scienze applicative per la soluzione dei relativi problemi. È facile verificare, infatti, come qualunque problema di Fisica, o anche di Geometria, che non sia di carattere assolutamente elementare, presenti la necessità di esprimere una funzione a partire da una ben determinata condizione, cui essa deve soddisfare insieme alla variabile indipendente e alle sue derivate. Da molti problemi riguardanti argomenti scientifici, quindi, nasce proprio l'esigenza di considerare grandezze di cui non si conosca il tasso di variazioni. Ad esempio, l'equazione $\frac{dx}{dt} = -kx$ rappresenta il decadimento radioattivo (x è la quantità di sostanza non decaduta all'istante t); l'equazione $m \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = F\left(t, r, \frac{dr}{dt}\right)$ rappresenta il moto di un punto di massa m soggetto ad una forza F dipendente dal tempo t, dalla posizione r e dalla velocità $v = \frac{dr}{dt}$; l'equazione $x'' + k^2x = 0$ rappresenta un moto armonico, tipico di una molla. Per risolvere uno dei problemi sopra esposti. pertanto, occorre risolvere le equazioni differenziali relative.

L'importanza dell'argomento si accompagna ad imponenti sviluppi teorici e a non poche, e molto spesso insuperabili, difficoltà analitiche che si frappongono al raggiungimento dell'espressione della funzione incognita che risolve il problema.

È sottinteso, comunque, che, tenuto presente il carattere del Corso cui sono dedicate queste considerazioni preliminari, l'argomento verrà affrontato solo per cenni, evitando ogni approfondimento di carattere puramente teorico e limitando l'esame a quei casi che interessano in particolare le questioni più semplici.

Per concludere queste premesse si ripeterà che le accennate difficoltà analitiche, che si incontrano nella soluzione (integrazione) di equazioni differenziali, risultano oggi insuperabili con l'ausilio dei metodi del Calcolo numerico ma attuabili, invece, per mezzo dell'elaboratore elettronico.

2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

È ben noto come le equazioni matematiche possano essere classificate in due categorie: *numeriche*, il cui oggetto è rappresentato proprio dalla determinazione di uno o più numeri,

e *funzionali*, il cui oggetto, invece, è insito nella determinazione di una o più funzioni (l'elemento incognito delle equazioni funzionali non è altro che la funzione stessa!). A quest'ultima categoria appartengono le cosiddette *equazioni differenziali* che, a loro volta, si distinguono in *ordinarie* e *alle derivate parziali*.

Definizione. Si definisce *equazione differenziale ordinaria di ordine n* ogni equazione nella quale figuri come incognita una funzione, $y = y(x)$, della variabile x, la funzione y e tutte le sue derivate fino alla $(n-1)-$esima, ovvero un'equazione della forma:

$$\textbf{(1)} \qquad F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, ...,\, y^{(n)}\right) = 0$$

con:

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, ...,\, y^{(n-1)}\right)$$

Osservazione. Dalla definizione segue che un'equazione differenziale ordinaria di ordine *n* non è altro che una relazione esprimente un legame tra la variabile indipendente x, la funzione y e alcune derivate della y stessa.

L'*ordine* dell'equazione è il massimo ordine delle derivate che in essa compaiono.
Una funzione $y = j(x)$ è *soluzione* (o *integrale*) della **(1)** se, sostituendo nella **(1)**, al posto di $y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}$ rispettivamente $j(x),\ j'(x),\ j''(x),\ \ldots,\ j^{(n)}(x)$ si ottiene un'identità, cioè se:

$$F\left[x,\, j(x),\, j'(x),\, j''(x),\, \ldots,\, j^{(n)}(x)\right] \equiv 0$$

Integrare un'equazione differenziale significa determinare tutte le sue soluzioni.
L'*integrazione* di un'equazione differenziale, invece, è il complesso di operazioni che occorre eseguire per pervenire alle soluzioni.
Osservazione 1. L'aggettivo *ordinaria* sta a ricordare che la funzione incognita y dipende dalla sola variabile x.
Osservazione 2. È possibile considerare anche equazioni differenziali in cui la funzione incognita dipenda da due o più variabili, ovvero equazioni che stabiliscano un legame tra queste variabili, la funzione incognita e le sue derivate parziali: tali equazioni sono dette *equazioni differenziali alle derivate parziali*.

ESEMPI

a) $y' = x + 1$

è un'equazione differenziale del primo ordine (vi è solo la derivata prima della y, cioè y').

b) $yy'' + y'^2 = yy'$

è un'equazione differenziale del secondo ordine (figura anche la derivata seconda di y, cioè y'').

g) $y'' = x + \sin x$

è ancora un'equazione differenziale del secondo ordine.

d) $y^2 y^{(5)} = 2x^3$

è un'equazione differenziale di ordine 5 ($y^{(5)}$ è la derivata quinta di *y*).

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Nel presente paragrafo verrà affrontato il problema della risoluzione di tutte quelle equazioni differenziali cosiddette lineari, di notevole interesse nel campo delle applicazioni.

Definizione. Un'equazione differenziale di ordine *n* si dice *lineare* se la funzione incognita *y* e le sue derivate, y', y'', y''', $y^{(4)}$, …, $y^{(n-1)}$, sono funzioni lineari, ovvero se l'equazione differenziale è di primo grado **nel complesso** della *y* e delle sue derivate. L'equazione differenziale lineare si potrà quindi scrivere, nella forma più generale possibile, come segue:

(1) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

con $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ funzioni definite e continue in un medesimo intervallo *I*.

ESEMPI

a) L'equazione differenziale

$$y'' + x^2 y' + 5y = \sin x$$

è del secondo ordine (vi è il termine y'') lineare, essendo *y*, y', y'' funzioni lineari (di primo grado!).

b) L'equazione differenziale

$$y'' + xy' + 3y^2 = \cos x$$

è ancora del secondo ordine ma non è lineare in quanto compare il termine y^2 (la *y* è di secondo grado!).

g) L'equazione differenziale

$$yy' - \sin x = 0$$

è del primo ordine (vi è il termine y') ma non è lineare in quanto contiene il termine yy' che, nel complesso, risulta di secondo grado.

d) L'equazione differenziale

$$yy''' = 2x$$

è del terzo ordine (vi è il termine y''') ma non è lineare in quanto contiene il termine yy''' che, nel complesso, risulta di quarto grado.

Definizione. Se nella **(1)** la funzione $f(x)$, che rappresenta il *termine noto*, risulta identicamente nulla in *I*, allora l'equazione differenziale della forma:

(2) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

si dirà *omogenea*; in caso contrario, invece, *non omogenea*.

Risulta allora possibile, in una prima analisi, suddividere le equazioni differenziali lineari in due categorie:

(a) **<u>omogenee</u>**, ossia riducibili alla forma:

$$\textbf{(}a\textbf{)} \qquad y' + f(x)\,y = g(x) \equiv 0$$

essendo $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo I (limitato o illimitato).

Poiché la **(***a***)** non è altro che un'equazione differenziale a variabili separabili, si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\,y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -\int f(x)dx + c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log|y| = -\int f(x)dx + \log|c| \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -\int f(x)dx + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{-\int f(x)dx + c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{c_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_2 e^{-\int f(x)dx}$$

con c_2 costante arbitraria, positiva o negativa. Si osservi, però, che può essere anche $c_2 = 0$ poiché, in tal caso, si ottiene $y = 0$, che è ancora un integrale della **(***a***)**.

(b) **<u>non omogenee</u>**, ossia riducibili alla forma:

$$\textbf{(}b\textbf{)} \qquad y' + f(x)\,y = g(x) \neq 0$$

essendo $f(x)$ e $g(x)$ funzioni definite e continue in un comune intervallo I (limitato o illimitato).

Dei vari procedimenti che conducono alla determinazione dell'integrale generale della **(***b***)**, esporremo, in questo contesto, solo il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*. A tal proposito, consideriamo, in primo luogo, l'equazione omogenea associata alla **(***b***)**, della forma:

$$y' + f(x)\,y = 0$$

il cui integrale generale, in virtù di quanto sopra descritto, è proprio:

$$\textbf{(}g\textbf{)} \qquad y(x) = c_2 e^{-\int f(x)dx}$$

dove c_2 non è più costante ma è una funzione di x. Ci si propone ora di determinare il valore di c_2 in modo tale che la **(***g***)** soddisfi la **(***b***)**. Derivando la **(***g***)** si ottiene:

$$y' = c_2' e^{-\int f(x)dx} + c_2 e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[-f(x)\right]$$

e sostituendo nella **(***b***)** si ha:

$$c_2' e^{-\int f(x)dx} - c_2 f(x) e^{-\int f(x)dx} + f(x)\,y = g(x)$$

In virtù della **(*g*)** risulta quindi:

$$c_2' e^{-\int f(x)dx} - c_2 f(x) e^{-\int f(x)dx} + c_2 f(x) e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

ossia:

$$c_2' e^{-\int f(x)dx} = g(x) \quad \Rightarrow \quad c_2' = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

Dunque per:

$$c_2 = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx + c_3$$

la **(*g*)** soddisfa la **(*b*)**. Sostituendo, infine, nella **(*g*)** il valore di c_2 trovato, si ottiene l'integrale generale della **(*b*)**.
Precisamente:

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[\int g(x) e^{\int f(x)dx} dx + c_3 \right]$$

con c_3 costante arbitraria.

ESEMPI

***a*)** $y' = -xy + 2x$

Si osservi innanzitutto che l'equazione differenziale assegnata è:

- lineare (la *y* e la sua derivata prima y' sono di primo grado)
- non omogenea $\left(g(x) = 2x \neq 0\right)$

In primo luogo occorre determinare l'integrale generale dell'omogenea associata, ovvero dell'equazione:

$$y' + xy = 0$$

a variabili separabili. Pertanto si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int xdx \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -\frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + c} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \textbf{(integrale generale dell'omogenea associata)}$$

Osservazione. La costante c_1 considerata è funzione di *x*.

Derivando ora la $y(x)$, rispetto alla variabile *x*, si ottiene:

$$y'(x) = c_1'(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - c_1(x) \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sostituendo ora la $y(x)$ e la $y'(x)$ determinati nell'equazione di partenza, si ha:

$$y' = -xy + 2x \quad \Rightarrow \quad c_1'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - c_1(x)\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\left(c_1 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + 2x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 2x \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = 2x\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_1(x) = 2\int x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} + c_2$$

Ponendo, infine, il valore di c_1 trovato nell'integrale generale dell'omogenea associata si ottiene:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left(2e^{\frac{x^2}{2}} + c_2\right)e^{-\frac{x^2}{2}} = 2 + c_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dunque:

$$y(x) = 2 + c_2 e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \textbf{(integrale generale della non omogenea)}$$

b) $xy' - y - 2x^2 = 0$

Si osservi innanzitutto che l'equazione differenziale assegnata è:

- lineare (la *y* e la sua derivata prima y' sono di primo grado)
- non omogenea $\left(g(x) = 2x^2 \neq 0\right)$

L'equazione omogenea associata:

$$xy' - y = 0$$

è a variabili separabili.

Ne segue che:

$$x\cdot\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \log|y| = \log|x| + c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = x\cdot e^{c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1(x)\cdot x \qquad \textbf{(integrale generale dell'omogenea associata)}$$

Derivando la $y(x)$, rispetto alla variabile *x*, si ottiene:

$$y'(x) = c_1'(x)\cdot x + c_1(x)$$

Sostituendo ora la $y(x)$ e la $y'(x)$ determinati nell'equazione di partenza, si ha:

$$xy' - y - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x\left[c_1'(x)\cdot x + c_1(x)\right] - c_1(x)\cdot x = 2x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x)\cdot x^2 + x\cdot c_1(x) - c_1(x)\cdot x = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad c_1'(x)\cdot x^2 = 2x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(x)=2 \quad \Rightarrow \quad c_1(x)=2\int dx \quad \Rightarrow \quad c_1(x)=2x+c_2$$

Ponendo, infine, il valore di c_1 trovato nell'integrale generale dell'omogenea associata si ottiene:

$$y(x)=c_1(x)\cdot x \quad \Rightarrow \quad y(x)=(2x+c_2)\cdot x=2x^2+c_2x$$

Dunque:

$$y(x)=2x^2+c_2x \qquad \textbf{(integrale generale della non omogenea)}$$

g) $y'+4x^3y=0$

Si osservi innanzitutto che l'equazione differenziale assegnata è:

- lineare (la y e la sua derivata prima y' sono di primo grado)
- omogenea $(g(x)=0)$

è a variabili separabili. Ne segue banalmente che:

$$\frac{dy}{dx}+4x^3y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-4x^3dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y}=-4\int x^3dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log|y|=-x^4+c \quad \Rightarrow \quad y(x)=c_1e^{-x^4} \qquad \textbf{(integrale generale)}$$

d) $3y^2y'-2x=0$

Si osservi innanzitutto che l'equazione differenziale assegnata è:

- non lineare (la y non è di primo grado ma di secondo grado)
- non omogenea $(g(x)=2x\neq 0)$

Dunque non è possibile utilizzare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

4. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nel presente paragrafo ci si limiterà a considerare un caso particolare di equazioni differenziali lineari, spesso usate nelle applicazioni: si tratta delle cosiddette *equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti* (omogenee o non omogenee) del tipo:

$$\textbf{(1)} \qquad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ \ldots\ +a_ny=f(x)$$

con $a_1\neq 0$ ed $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ costanti.

Osservazione. È sempre possibile ridurre un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti nella forma **(1)**, dividendo per il primo coefficiente $a_1\neq 0$.

Definizione. Si dice *equazione omogenea associata* alla **(1)** un'equazione del tipo:

$$\textbf{(2)} \qquad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ \ldots\ +a_ny=0$$

ottenuta, cioè, dalla **(1)** eguagliando a zero il termine noto $f(x)$.

Ci si occuperà, almeno per il momento, della risoluzione delle equazioni differenziali **lineari del secondo ordine**, omogenee e non, a coefficienti costanti della forma:

$$(*) \qquad y''+a_1y'+a_2y=f(x)$$

con $a_1 \neq 0$ ed a_1, a_2 costanti.

Ne segue che se:

$$(**) \qquad y''+a_1y'+a_2y=0$$

è l'equazione omogenea associata alla **(*)**, risulta possibile determinare un suo integrale particolare della forma:

$$(a) \qquad y=e^{ax}$$

con a costante. Dalla (a) segue infatti:

$$\begin{cases} y'=a\,e^{ax} \\ y''=a^2e^{ax} \end{cases}$$

da cui, sostituendo nella **(**)**, si ha:

$$a^2e^{ax}+a_1a\,e^{ax}+a_2e^{ax}=0$$

e, dividendo entrambi i membri per $e^{ax} \neq 0$, si ottiene:

$$(\cdot) \qquad a^2+a_1a+a_2=0$$

ovvero un'equazione di secondo grado nella variabile a.

Viceversa, se il numero a soddisfa la $(\cdot)$ allora risulta evidente che la (a) sia un integrale particolare della **(**)**.

E' chiaro, dunque, che affinché $y=e^{ax}$ sia un integrale particolare della **(**)** è necessario e sufficiente che il numero a soddisfi la $(\cdot)$, ovvero che sia una radice dell'equazione di secondo grado:

$$(\cdot\cdot) \qquad l^2+a_1l+a_2=0$$

detta *equazione caratteristica* della **(**)**.

Denotate, pertanto, con l_1, l_2 le due radici della $(\cdot\cdot)$, è possibile distinguere i seguenti casi:

PRIMO CASO: $\boxed{\Delta>0} \quad \Rightarrow \quad l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$

Le funzioni e^{l_1x}, e^{l_2x} sono due integrali particolari della **(**)** mentre l'integrale generale è dato da:

$$(b) \qquad y(x)=c_1e^{l_1x}+c_2e^{l_2x}$$

Osservazione. Come risulta da immediata verifica, qualunque siano c_1 e c_2, la è soluzione della **(**)**; è inoltre sempre possibile determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che, in corrispondenza di un valore arbitrariamente prefissato x_0 di x, la y e la y' assumano rispettivamente i valori y_0 ed y_0', pure fissati ad arbitrio.

È, infatti, sufficiente risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y_0 = c_1 e^{l_1 x_0} + c_2 e^{l_2 x_0} \\ y_0' = c_1 l_1 e^{l_1 x_0} + c_2 l_2 e^{l_2 x_0} \end{cases}$$

dal quale è possibile ricavare, in modo unico, i valori di c_1 e c_2.

SECONDO CASO: $\boxed{\Delta = 0} \quad \Rightarrow \quad l_1,\ l_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l_1 = l_2$

L'integrale generale della **(**)** diventa:

(*b'*) $$y(x) = c_1 e^{l_1 x} + c_2 x e^{l_1 x}$$

come risulta da considerazioni analoghe a quelle precedentemente esposte.

TERZO CASO: $\boxed{\Delta < 0} \quad \Rightarrow \quad l_1,\ l_2 \in \mathbb{C}$

Avendo, in tal caso, la **(· ·)** soluzioni complesse coniugate anche l'integrale generale avrà forma complessa. Risulta però possibile far assumere all'integrale generale forma reale nel modo seguente: se, infatti

$$\begin{cases} l_1 = a + ib \\ l_2 = a - ib \end{cases}$$

utilizzando le formule di Eulero:

$$\begin{cases} e^{l_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \\ e^{l_2 x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) \end{cases}$$

la **(*b*)** diventa:

(*b''*) $$y(x) = c_1 e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + c_2 e^{ax}(\cos bx - i \sin bx) =$$

$$= e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos bx + i(c_1 - c_2)\sin bx\right]$$

o anche:

$$y(x) = e^{ax}(c \cos bx + c' \sin bx) = c e^{ax} \cos bx + c' e^{ax} \sin bx$$

avendo posto:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c \\ i(c_1 - c_2) = c' \end{cases}$$

Dopo aver determinato l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti resta da analizzare il caso in cui l'equazione assegnata non sia omogenea, cioè della forma :

(*) $$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \neq 0$$

Osserviamo innanzitutto che, indicata con $y_0(x) = f_0(x)$ una qualunque funzione che soddisfi la **(*)**, o meglio un integrale particolare della **(*)**, e con $\bar{y}$ l'integrale generale dell'omogenea associata, allora:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}$$

rappresenta proprio l'integrale generale della **(*)**. In altri termini l'integrale dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea è dato dalla somma di un suo integrale particolare e dell'integrale generale dell'omogenea associata. Resta, quindi, da stabilire come determinare un integrale particolare della **(*)**, avente al secondo membro una generica $f(x)$ non nulla. Tale determinazione esula, in generale, dalla nostra trattazione (dovrebbero esporsi, a riguardo, alcuni metodi celebri suggeriti dall'Analisi Matematica ma, ricordando sempre il carattere del Corso, si rinuncia a tale esposizione) in quanto nella maggioranza, per non dire nella quasi totalità, delle applicazioni che interessano l'integrale particolare in questione sarà facilmente, o addirittura immediatamente, identificabile.

Per la determinazione dell'integrale particolare della non omogenea, $y_0(x)$, si può ricorrere al cosiddetto *metodo della variazione delle costanti*, dovuto a Lagrange, descritto dal seguente:

Teorema. Siano $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata alla **(*)**. Siano inoltre $g_1(x)$ e $g_2(x)$ due funzioni tali che le loro derivate prime risolvano il sistema:

$$\begin{cases} g_1'(x)\, y_1(x) + g_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ g_1'(x)\, y_1'(x) + g_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Allora, come si prova, un integrale particolare della **(*)** sarà una funzione della forma:

$$y_0(x) = g_1(x)\, y_1(x) + g_2(x)\, y_2(x)$$

ESEMPI

a) $y'' - 6y' + 5y = 0$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare (non compaiono i termini misti in y e nelle sue derivate)
- del secondo ordine (figura il termine y'')
- omogenea (il termine noto è nullo)
- a coefficienti costanti (1, −6, 5 sono delle costanti)

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

le cui soluzioni:

$$\lambda_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 = \begin{cases} 1 = \lambda_1 \\ 5 = \lambda_2 \end{cases}$$

sono reali e distinte, essendo $\boxed{\Delta > 0}$. Dunque un integrale generale dell'equazione differenziale è della forma:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{5x}$$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine

- omogenea
- a coefficienti costanti

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da:

$$l^2 - 2l + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (l-1)^2 = 0$$

le cui soluzioni:

$$l_{1,\,2} = 1$$

sono reali e coincidenti, essendo $\boxed{\Delta = 0}$. Dunque un integrale generale dell'equazione differenziale è della forma:

$$y(x) = c_1 e^{l_1 x} + c_2 x e^{l_1 x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

g) $y'' - 2y' + 2y = 0$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine
- omogenea
- a coefficienti costanti

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da:

$$l^2 - 2l + 2 = 0$$

le cui soluzioni:

$$l_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{1}\,i = \begin{cases} 1 - i = l_1 \\ 1 + i = l_2 \end{cases}$$

sono complesse e coniugate, essendo $\boxed{\Delta < 0}$. Dunque un integrale generale dell'equazione differenziale è della forma:

$$y(x) = c_1 e^{a\,x} \cos b\,x + c_2 e^{a\,x} \sin b\,x \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

dove:

$a = 1$ è la parte reale

$b = 1$ è la parte complessa

d) $y'' + 3y = 0$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine
- omogenea
- a coefficienti costanti

L'equazione caratteristica ad essa associata è data da:

$$l^2 + 3 = 0$$

le cui soluzioni:

$$l_{1,\,2} = \frac{\pm\sqrt{-12}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{-3}}{2} = \pm\sqrt{3}\,i \begin{cases} -\sqrt{3}\,i = l_1 \\ +\sqrt{3}\,i = l_2 \end{cases}$$

sono complesse e coniugate, essendo $\boxed{\Delta < 0}$. Dunque un integrale generale dell'equazione differenziale è della forma:

$$y(x) = c_1 e^{a\,x} \cos b\,x + c_2 e^{a\,x} \sin\, b\,x \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 \cos\sqrt{3}\,x + c_2 \sin\sqrt{3}\,x$$

dove:

$a = 0$ è la parte reale

$b = \sqrt{3}$ è la parte complessa

e) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine
- non omogenea (il termine noto è diverso da zero: è un polinomio di terzo grado)
- a coefficienti costanti

Occorre determinare, in primo luogo, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

calcolando, le soluzioni della relativa equazione caratteristica:

$$l^2 - 3l + 2 = 0$$

Essendo, pertanto, $l_1 = 1$ e $l_2 = 2$, ne segue che l'integrale generale dell'omogenea risulta della forma:

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Resta ora da determinare un integrale particolare y_0 dell'equazione differenziale non omogenea assegnata, al cui secondo membro figura un polinomio di terzo grado in *x*, cioè:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$$

Per determinare y_0 con il metodo della variazione delle costanti occorre cercare una soluzione della forma:

$$\textbf{(1)} \qquad y_0 = g_1(x) e^x + g_2(x) e^{2x}$$

con g_1' e g_2' soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} g_1'(x) e^x + g_2'(x) e^{2x} = 0 \\ g_1'(x) e^x + 2 g_2'(x) e^{2x} = 2x^3 - x^2 + 1 \end{cases}$$

Sottraendo alla seconda equazione la prima si ottiene:

$g_2'(x) e^{2x} = 2x^3 - x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = \left(2x^3 - x^2 + 1\right) e^{-2x} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g_2'(x) = 2x^3 e^{-2x} - x^2 e^{-2x} + e^{-2x}$

e sostituendo nella prima:

$g_1'(x) e^x + \left(2x^3 e^{-2x} - x^2 e^{-2x} + e^{-2x}\right) e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad g_1'(x) = -\left(2x^3 e^{-2x} - x^2 e^{-2x} + e^{-2x}\right) e^{2x} \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad g_1'(x) = -\left(2x^3e^{-2x} - x^2e^{-2x} + e^{-2x}\right)e^x \quad \Rightarrow \quad g_1'(x) = -2x^3e^{-x} + x^2e^{-x} - e^{-x}$$

Quindi:

$$\begin{cases} g_1'(x) = -2x^3e^{-x} + x^2e^{-x} - e^{-x} \\ g_2'(x) = 2x^3e^{-2x} - x^2e^{-2x} + e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1(x) = -2\int x^3e^{-x}dx + \int x^2e^{-x}dx - \int e^{-x}dx \\ g_2(x) = 2\int x^3e^{-2x}dx - \int x^2e^{-2x}dx + \int e^{-2x}dx \end{cases}$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti si ha:

$$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + k_1$$

(formula di integrazione per parti applicata 3 volte)

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + k_2$$

(formula di integrazione per parti applicata 2 volte)

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + k_3$$

$$\int x^3e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} - \frac{3}{8}e^{-2x} + k_4$$

(formula di integrazione per parti applicata 3 volte)

$$\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + k_5$$

(formula di integrazione per parti applicata 2 volte)

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + k_6$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} g_1(x) = -2\left(-x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x}\right) + \left(-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right) - \left(-e^{-x}\right) \\ g_2(x) = 2\left(-\frac{1}{2}x^3e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} - \frac{3}{8}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + \\ \qquad + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} g_1(x) = 2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x} + 12xe^{-x} + 12e^{-x} - x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} \\ g_2(x) = -x^3e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2e^{-2x} - \frac{3}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} g_1(x) = \left(2x^3 + 5x^2 + 10x + 11\right)e^{-x} \\ g_2(x) = \left(-x^3 - x^2 - x - 1\right)e^{-2x} \end{cases}$$

Pertanto la **(1)** diventa:

$$y_0 = g_1(x)e^x + g_2(x)e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = \left(2x^3 + 5x^2 + 10x + 11\right)e^{-x} \cdot e^x + \left(-x^3 - x^2 - x - 1\right)e^{-2x} \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = 2x^3 + 5x^2 + 10x + 11 - x^3 - x^2 - x - 1 = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$

L'integrale particolare, quindi, è dato da:

$$y_0(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$

per cui l'integrale generale della non omogenea sarà:

$$y(x) = \bar{y} + y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$

*z***)** $y'' - y = 3x^2 - 1$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine
- non omogenea
- a coefficienti costanti

Occorre determinare, in primo luogo, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - y = 0$$

calcolando, le soluzioni della relativa equazione caratteristica:

$$l^2 - 1 = 0$$

Essendo, pertanto, $l_1 = 1$ e $l_2 = -1$, ne segue che l'integrale generale dell'omogenea risulta della forma:

$$\bar{y} = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione data con il metodo della variazione delle costanti occorre cercare una soluzione della forma:

$$\textbf{(1)} \qquad y_0 = g_1(x)e^x + g_2(x)e^{-x}$$

con g_1' e g_2' soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} g_1'(x)e^x + g_2'(x)e^{-x} = 0 \\ g_1'(x)e^x - g_2'(x)e^{-x} = 3x^2 - 1 \end{cases}$$

Sottraendo alla prima equazione la seconda si ha:

$$2g_2'(x)e^{-x} = -3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)e^x \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}x^2e^x$$

$$\Rightarrow \quad g_2(x) = \int\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}x^2e^x\right)dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}\int x^2e^x dx$$

Utilizzando il metodo di integrazione per parti si ottiene:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$$

Quindi:

$$g_2(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}\int x^2 e^x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}\left(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x\right) = \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}x^2 e^x + 3xe^x - 3e^x =$$

$$= \frac{e^x\left(-3x^2 + 6x - 5\right)}{2}$$

Sostituendo ora tale valore nella prima equazione del sistema risulta:

$$g_1'(x) = \left[-g_2'(x)e^{-x}\right]e^{-x} = -g_2'(x)e^{-2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g_1'(x) = \left[-\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)e^x\right]e^{-2x} = -\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 e^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g_1(x) = \int\left(-\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}\int x^2 e^{-x} dx$$

Utilizzando il metodo di integrazione per parti si ottiene:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$$

Quindi:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}\int x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}\left(-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right) = \frac{-e^{-x}\left(3x^2 + 6x + 5\right)}{2}$$

Ponendo infine i valori di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ trovati nella **(1)** si ha:

$$y_0 = g_1(x)e^x + g_2(x)e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \left[\frac{-e^{-x}\left(3x^2 + 6x + 5\right)}{2}\right]e^x + \left[\frac{e^x\left(-3x^2 + 6x - 5\right)}{2}\right]e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad y_0 = \frac{-3x^2 - 6x - 5}{2} + \frac{-3x^2 + 6x - 5}{2} = \frac{-3x^2 - 6x - 5 - 3x^2 + 6x - 5}{2} = \frac{-6x^2 - 10}{2} =$$

$$= -3x^2 - 5$$

Dunque, l'integrale generale della non omogenea è:

$$y(x) = \bar{y} + y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 3x^2 - 5$$

h) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$

Osserviamo innanzitutto che l'equazione assegnata è:

- lineare
- del secondo ordine
- non omogenea
- a coefficienti costanti

Osserviamo innanzitutto che per l'equazione omogenea associata:

$$y''+y=0$$

l'integrale generale è della forma:

$$\bar{y}=c_1e^{a\,x}\cos b\,x+c_2e^{a\,x}\sin b\,x=c_1\cos x+c_2\sin x$$

essendo $\Delta<0$, $a=0$ e $b=1$.

Per determinare un integrale particolare dell'equazione data con il metodo della variazione delle costanti occorre, quindi, cercare una soluzione del tipo:

$$\textbf{(1)}\qquad y_0=g_1(x)\cos x+g_2(x)\sin x$$

con g_1' e g_2' soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} g_1'(x)\cos x+g_2'(x)\sin x=0 \\ -g_1'(x)\sin x+g_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha:

$$g_1'(x)\cos x=-g_2'(x)\sin x \quad\Rightarrow\quad g_1'(x)=-g_2'(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-g_2'(x)\cdot\mathrm{tg}x$$

Sostituendo ora tale valore nella seconda equazione si ottiene:

$$g_2'(x)\cdot\mathrm{tg}x\cdot\sin x+g_2'(x)\cos x=\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow\quad g_2'(x)\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos x}+g_2'(x)\cdot\cos x=\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad g_2'(x)\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow\quad g_2'(x)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow\quad g_2'(x)=1$$

Dunque:

$$\begin{cases} g_1'(x)=-\mathrm{tg}x \\ g_2'(x)=1 \end{cases}$$

Integrando rispetto ad x si ha:

$$\begin{cases} g_1(x)=\log|\cos x| \\ g_2(x)=x \end{cases}$$

e sostituendo tali valore nella **(1)**:

$$y_0=g_1(x)\cos x+g_2(x)\sin x\quad\Rightarrow\quad y_0=\log|\cos x|\cdot\cos x+x\cdot\sin x$$

Dunque, l'integrale generale della non omogenea diventa:

$$y(x)=\bar{y}+y_0(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\log|\cos x|\cos x+x\sin x$$

5. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nel presente paragrafo ci si occuperà esclusivamente di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, o meglio di quelle equazioni nelle quali compare la variabile *x*, la funzione incognita *y* e la derivata prima della funzione y'.

Una tale equazione è quindi della forma:

$$\textbf{(1)} \qquad F(x, y, y') = 0$$

Osservazione. Nella **(1)** può non comparire la *x* o la *y* o entrambe ma deve necessariamente figurare la y' se si vuole parlare di equazione differenziale del primo ordine. Converrà sottolineare, a tal proposito, come l'operazione di integrazione indefinita rappresenti già l'integrazione dell'equazione differenziale della forma:

$$\textbf{(2)} \qquad y' = j(x)$$

nella quale manca la *y*. La **(2)**, com'è ben noto, propone il problema della ricerca della primitiva della $j(x)$, problema risolto attraverso l'integrazione indefinita:

$$\textbf{(3)} \qquad y = \int j(x)dx + c$$

essendo *c* una costante arbitraria. Si ha dunque una famiglia di soluzioni, ossia di curve, che differisce per una costante additiva. La **(3)** rappresenta il cosiddetto *integrale generale* dell'equazione **(2)**. Qualora, invece, si consideri una particolare soluzione corrispondente ad un valore comunque assegnato alla costante *c* la **(3)** fornirà un *integrale particolare* della **(2)**.

Per mettere in risalto il significato geometrico di quanto sopra esposto basta osservare come la **(3)** rappresenti una famiglia di curve, dette *curve integrali*, e come un integrale particolare corrisponda ad una curva specifica appartenente a tale famiglia, ottenuta supponendo che l'integrale generale soddisfi una specifica condizione imposta dal problema stesso. L'esempio più elementare che si possa offrire a riguardo è quello dato dall'equazione differenziale:

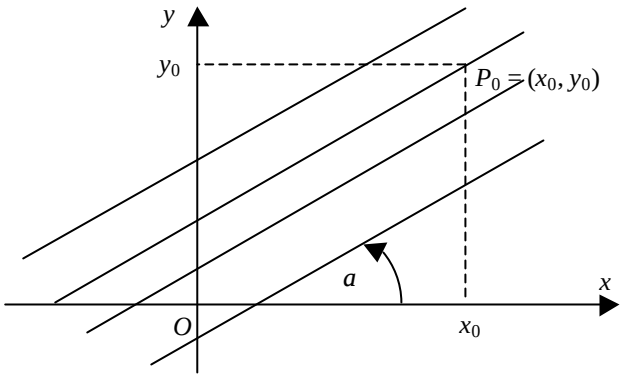
$$\textbf{(4)} \qquad y' = m \qquad \text{con} \qquad m = \text{costante}$$

ipotizzando che la curva relativa al problema passi per un punto assegnato di coordinate x_0, y_0. La soluzione della **(4)** si ottiene, quindi, determinando tutte quelle curve, con pendenza costante al variare di *x*, cioè una famiglia (fascio) di rette parallele. Infatti, integrando la **(4)** si ha:

$$y = mx + c$$

ovvero l'equazione di infinite rette, di eguale pendenza *m*, ottenute dagli infiniti valori assumibili dalla costante arbitraria *c*. Si osservi, inoltre, che, imponendo il passaggio della retta per un punto assegnato $P_0 = (x_0, y_0)$, la costante *c* genererà un integrale particolare: ponendo $x = x_0$ ed $y = y_0$, infatti, dall'integrale generale si otterrà il seguente valore della costante:

$$c_0 = y_0 - mx_0$$



A questo punto, rinunciando al più stretto rigore matematico, risulta possibile affermare che, in generale, un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine **(1)** ammette un integrale generale della forma:

$$f(x,\ y,\ c) = 0$$

contenente una costante arbitraria c, determinabile tramite una condizione posta dal particolare problema che si tratta.

Ci si limiterà, nel presente paragrafo, ad analizzare il caso di un'equazione differenziale elementare, ottenuta esplicitando, rispetto ad y', la **(1)**, della forma:

$$y' = g(x,\ y)$$

in cui la $g(x,\ y)$ si presenti come rapporto di due funzioni, una della sola x e l'altra della sola y: si tratta, cioè, di un'equazione cosiddetta a *variabili separabili*.
Se si considera pertanto l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{j(x)}{y(y)} \qquad \text{con} \qquad y(y) \neq 0$$

con:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

risulta:

$$y(y) = \frac{j(x)}{y'} \quad \Rightarrow \quad y(y) = j(x) \cdot \frac{dx}{dy}$$

ovvero:

$$\textbf{(4)} \qquad y(y) \cdot dy = j(x) \cdot dx$$

La **(4)** rappresenta proprio un'equazione differenziale a variabili separabili (al primo membro compare solo la y e al secondo membro solo la x). Si è ottenuta così quella che viene comunemente detta *separazione delle variabili*.

L'integrale generale, quindi, si ottiene subito integrando ambo i membri della **(4)** ed aggiungendo al secondo membro una costante arbitraria *c*, ovvero ponendo:

$$\textbf{(5)} \qquad \int y\,(y)dy = \int j\,(x)dx + c$$

Risolvendo ora la **(5)** risulta determinata la funzione incognita *y*, cioè l'equazione assegnata è risolta.

ESEMPI

*a***)** Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' = k \cdot \frac{y}{x}$$

Effettuando il procedimento sopra descritto si ha:

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = k \cdot \frac{dx}{x}$$

da cui, integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int \frac{dy}{y} = k \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = k \cdot \ln|x| + \ln|c| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^k| + \ln|c|$$

ovvero, passando all'esponenziale:

$$(a) \qquad y = cx^k$$

Osservazione 1. Si è considerato il $\ln|c|$ come costante per pura comodità formale.

Osservazione 2. Per $k = 1$ la **(*a*)** offre una famiglia di rette per l'origine con pendenza generica *c*.

Per $k = 2$, invece, la **(*a*)** rappresenta una famiglia di parabole $y = cx^2$ aventi per asse l'asse *y* e parametro variabile con *c*.

Per $k = -1$, infine, si ottiene una famiglia di iperboli equilatere riferite agli asintoti $y = \frac{c}{x}$.

*b***)** Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' = k \cdot \frac{x}{y}$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot \frac{x}{y}$$

Separando le variabili si ottiene:

$$y \cdot dy = k \cdot x \cdot dx$$

da cui integrando:

$$\int ydy = k \int xdx$$

ovvero:

$$\textbf{(}b\textbf{)} \qquad \frac{y^2}{2} = k \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

Osservazione. Per $k = 1$ si ottiene una famiglia di iperboli equilatere riferite agli assi:

$$\frac{y^2}{2c} - \frac{x^2}{2c} = 1$$

Per $k = -1$, invece, si ha una famiglia di cerchi, con il centro C nell'origine degli assi e raggio $r = \sqrt{2c}$, di equazione:

$$x^2 + y^2 = 2c$$

In tal caso, chiaramente, per ottenere cerchi reali occorrerà assumere c positiva.

*g***)** Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' = y^2$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

da cui integrando:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

ovvero:

$$-\frac{1}{y} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x + c}$$

che rappresenta proprio un'iperbole equilatera avente come centro il punto $C = (-c,\ 0)$ e, come asintoti, l'asse x e la retta parallela all'asse y di equazione $x = -c$.

*d***)** Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' - 2xe^{-y} = 0$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^y dy = 2x dx \quad \Rightarrow \quad \int e^y dy = 2\int x dx \quad \Rightarrow \quad e^y = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow$$

$$e^y = x^2 + c$$

ovvero:

$$y = \ln\left|x^2 + c\right|$$

e) Consideriamo l'equazione differenziale:

$$y' \cdot \mathrm{tg}x = y$$

ossia:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \mathrm{tg}x = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\mathrm{tg}x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|c|$$

ovvero:

$$y = c \sin x \qquad (\textbf{integrale generale})$$

Se ora poniamo $x = \frac{p}{6}$ ed $y = 2$ si trova:

$$c = \frac{y}{\sin x} = \frac{2}{\sin \frac{p}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

ossia:

$$y = 4 \sin x \qquad (\textbf{integrale particolare})$$

z) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = -2xy^2$$

e determinare l'integrale che verifica la condizione iniziale $y(1) = -1$.

Occorre determinare, in primo luogo, l'integrale generale, soluzione dell'equazione assegnata. Supposto $y \neq 0$, separando le variabili, si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = -2x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = -2 \int x dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -x^2 + c \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + c_1$$

ovvero:

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + c_1} \quad (\textbf{integrale generale})$$

Si osservi ora che l'equazione differenziale ha come soluzione **particolare** anche $y = 0$, ottenuta dall'integrale generale come limite per $c \to \infty$, cioè, come suol dirsi, dando a *c* il valore infinito. Per ottenere l'integrale particolare richiesto, invece, basta determinare il valore di *c* tale che $y(1) = -1$. Dall'integrale generale, ponendo $x = 1$, segue:

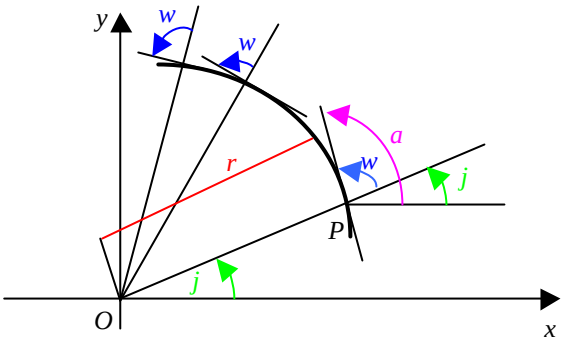
$$-1 = y(1) = \frac{1}{1^2 + c_1} = \frac{1}{1 + c_1} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2$$

ossia:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2} \qquad (\textbf{integrale particolare})$$

h) È istruttivo proporre ora il seguente problema geometrico. Si ricerchi, a tal proposito, la curva che in ogni punto taglia, sotto angolo costante, la semiretta uscente dall'origine degli assi e passante per quel punto.

Chiarito che l'angolo formato da due curve nel punto di intersezione è proprio l'angolo formato dalle rispettive tangenti nello stesso punto, e detto $P(x, y)$ il punto generico della curva, si deve imporre che sia w costante.



Dalla figura si ottiene subito che:

$$w = a - j$$

e quindi:

$$\mathrm{tg}\, w = \mathrm{tg}\,(a - j) = \frac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, j}{1 + \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, j}$$

Osservando che, se $y = f(x)$ è l'equazione della curva, si ha:

$$\mathrm{tg}\, a = y'$$

ed anche:

$$\mathrm{tg}\, j = \frac{y}{x}$$

da cui discende subito:

$$\mathrm{tg}\, w = \frac{y' - \dfrac{y}{x}}{1 + y' \cdot \dfrac{y}{x}} = \text{costante}$$

Se poi, per comodità, si indica la costante con $\frac{1}{k}$ si ottiene l'equazione differenziale:

$$k(y'x - y) = x + y'y$$

ossia:

(*g*) $$k(x\,dy - y\,dx) = x\,dx + y\,dy$$

Questa equazione potrà essere integrata immediatamente separando le variabili, qualora si passi dalle coordinate cartesiane a quelle polari ricordando che:

$$\textbf{(1)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ j = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Differenziando le **(1)** si ottiene:

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 2r\,dr \\ dj = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} d\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

da cui, tenendo presente che, per la regola di derivazione di un quoziente:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

segue:

$$\textbf{(1')} \qquad \begin{cases} xdx + ydy = r\,dr \\ dj = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

In base a queste ultime relazioni la **(*g*)** diventa:

$$k r^2 dj = r\,dr$$

da cui, separando le variabili, si ha:

$$\frac{1}{r} dr = k dj \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{r} dr = k \int dj \quad \Rightarrow \quad \ln|r| = kj + c$$

ovvero:

$$r = e^{kj+c} = e^{kj} \cdot e^c$$

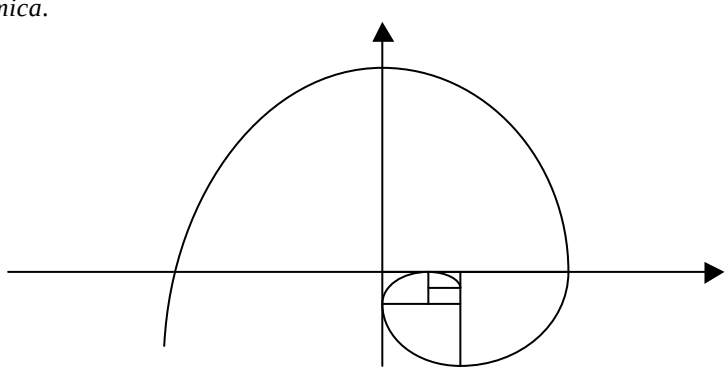
Ponendo infine:

$$e^c = c_1$$

si ottiene:

$$\textbf{(*d*)} \qquad r = c_1 e^{kj}$$

La **(*d*)** rappresenta, dunque, l'equazione di una curva nota con il nome di *spirale logaritmica*.



Gli esempi sopra riportati sono ritenuti sufficienti per dare un'idea precisa sul come si debba operare quando si incontri un'equazione differenziale della categoria fino ad ora considerata. Se per qualche equazione differenziale particolare dovessero occorrere specifici artifici si preferisce, per motivi di necessaria brevità, rimandare la loro esposizione nel momento in cui capiti la necessità dell'integrazione.
In questo paragrafo, inoltre, ci si è limitati esclusivamente alla considerazione di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Per quelle di ordine superiore al primo, invece, si accenna soltanto come il loro integrale generale contenga tante costanti arbitrarie indipendenti quant'è il loro ordine. È chiaro che in tal caso il problema impostato richiederà che siano soddisfatte altrettante condizioni da porre per la funzione e per le derivate successive fino alla $n-1$–esima, se n è l'ordine dell'equazione. Saranno così determinabili le costanti arbitrarie e sarà pertanto identificato l'integrale particolare che risolve lo specifico problema considerato. In questo contesto, invece, ci si limiterà a considerare solamente un tipo di equazione, abbastanza frequente nelle applicazioni, di ordine generico n, contenente semplicemente la derivata n–esima della funzione incognita e la variabile indipendente. Una tale equazione, esplicitata rispetto alla derivata, si presenterà nella forma:

$$y^{(n)} = f(x)$$

avendo indicato con $y^{(n)}$ la derivata n–esima di y. Risulterà allora possibile pervenire alla funzione y attraverso n integrazioni successive, come sarà chiarito dal seguente semplice esempio, assai importante per le applicazioni.

ESEMPIO

Sia data la seguente equazione differenziale del quarto ordine:

$$y^{(4)} = k$$

con k costante. Integrando una prima volta si ottiene:

$$\textbf{(1)} \qquad y^{(3)} = kx + c_1$$

ed integrando una seconda volta:

$$\textbf{(2)} \qquad y^{(2)} = y'' = k\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

e procedendo allo stesso modo per altre due volte si ottiene:

$$\textbf{(3)} \qquad y' = k\frac{x^3}{6} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$\textbf{(4)} \qquad y = k\frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \qquad (\textbf{integrale generale})$$

Le quattro costanti arbitrarie così introdotte potranno essere determinate tramite altrettante condizioni da imporre per far "aderire" l'integrale ottenuto al particolare problema che si tratta.

Per concludere l'esempio, quindi, supponiamo che, per una funzione valida nell'intervallo $[0,\ l]$, le quattro condizioni da porre siano le seguenti:

per $\boxed{x=0}$ deve essere **(*a*)** $y=0$ $\Rightarrow$ **(*a'*)** $y'=0$

per $\boxed{x=l}$ deve essere **(*b*)** $y=0$ $\Rightarrow$ **(*b'*)** $y''=0$

Sostituendo le condizioni **(*a*)** ed **(*a'*)** rispettivamente nelle equazioni **(4)** e **(3)**, si ottiene:

(5) $\qquad c_4=0=c_3$

Sostituendo, invece, le **(*b*)** e **(*b'*)** rispettivamente nelle equazioni **(4)** e **(2)**, si ha:

(6) $$\frac{kl^4}{24}+c_1\frac{l^3}{6}+c_2\frac{l^2}{2}+c_3l+c_4=0$$

(7) $$\frac{kl^2}{2}+c_1l+c_2=0$$

Per le **(5)** la **(6)** diventa:

(6') $$k\frac{l^4}{24}+c_1\frac{l^3}{6}+c_2\frac{l^2}{2}=0$$

che, insieme alla **(7)**, fornisce il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite c_1 e c_2:

$$\begin{cases} 2lc_1+2c_2=-kl^2 \\ 4lc_1+12c_2=-kl^2 \end{cases}$$

da cui:

$$c_2=\frac{kl^2}{8} \qquad \text{e} \qquad c_1=-\frac{5kl}{8}$$

Con i valori così individuati per le quattro costanti l'integrale particolare che risolve lo specifico problema proposto sarà:

(4') $$y=\frac{kx^4}{24}-\frac{5kl}{8}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{kl^2}{8}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{kl^4}{8}\cdot\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^4-\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

(**integrale particolare**)